1è Edition



cours ,TP et TD de physique

Filière : SMP , SMC et SM

+ TD corrigés pour S.V. et S.T.U.

Préparer pas :



Année universitaire 2009/2010

Collection U

1é Edition :

La Mécanique

Sommaire

- Cours
- TD
- Correction des TD

COURS DE MECANIQUE DU POINT MATERIEL.
POUR LE PREMIER SEMESTRE .

SOMMAIRE

CHAPITRE 1 :

A) SYSTEMES DE COORDONNEES

Selon la nature de la trajectoire d'une particule, sa position sera repérée par l'un des systèmes de coordonnées : cartésiennes, cylindriques ou sphériques.

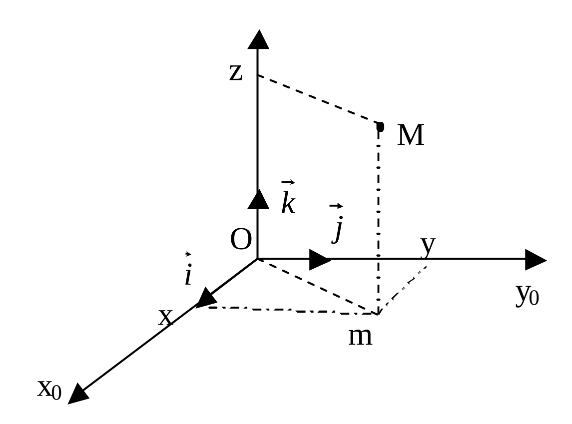
Soient $R_0(O,x_0y_0z_0)$ un repère direct orthonormé de base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et M la particule à repérer.

I] Système de coordonnées cartésiennes.

Dans R0, la position de la particule M est donnée par ses trois coordonnées cartésiennes (x,y,z) telles que :

x = abscisse de M ; y = ordonnée de M ; z = côte de M.

$x \quad \mathrm{Pr}\,oj_{Ox_0}\,\overrightarrow{OM}$; $\quad y \quad \mathrm{Pr}\,oj_{Oy_0}\,\overrightarrow{OM}$; $z \quad \mathrm{Pr}\,oj_{Oz_0}\,\overrightarrow{OM}$.



Dans R_0, le vecteur position s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} \quad \overrightarrow{Om} \quad \overrightarrow{mM} \quad x\vec{i} \quad y\vec{j} \quad z\vec{k}\,.$$

Déplacement élémentaire.

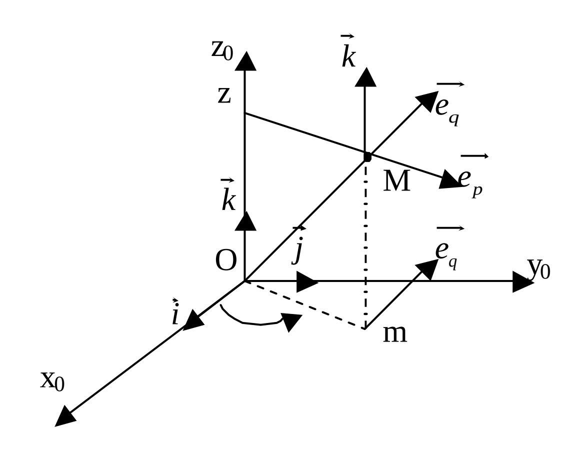
Le vecteur déplacement élémentaire $\overrightarrow{MM'}$ (M' est rès voisin de M) s'écrit:

$$\overrightarrow{MM'} \quad d\overrightarrow{OM} \quad d\overrightarrow{M} \quad dx\vec{i} \quad dy\vec{j} \quad dz\vec{k}$$

(Dans R_0, $d\vec{i} \quad d\vec{j} \quad d\vec{k} \quad \vec{0}$)

II] Systèmes de coordonnées cylindriques.

Si la trajectoire du point M possède une symétrie axiale de révolution, il est intéressant d'utiliser les coordonnées cylindriques de ce point (, ,z) définies comme suit : $p \quad \left|\overrightarrow{Om}\right|$ (m est la projection de M sur le plan (x_0Oy_0)), $q \quad angle(\overrightarrow{Ox_0},\overrightarrow{Om})$ et z est la projection du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ sur l'axe $\overrightarrow{Oz_0}$.

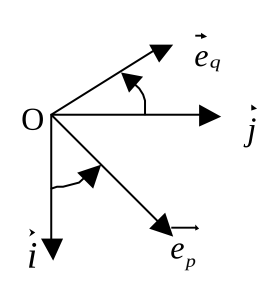


Une nouvelle base orthonormée directe $(\vec{e}_p, \vec{e}_q, \vec{k})$ est associée à ce système de coordonnées telle que :

$$\vec{e}_p \quad \cos q\vec{i} \quad \sin q\vec{j}.$$
$$\vec{e}_q \quad \sin q\vec{i} \quad \cos q\vec{j}.$$

avec $\dfrac{d\vec{e}_p}{dq} \quad \vec{e}_q$

et $\dfrac{d\vec{e}_q}{dq} \quad \vec{e}_p$.



Quand le point M décrit tout l'espace, les intervalles de variation de , et z sont :
0 < + ; 0 2 ; - < z < + .

Dans la base $(\vec{e}_p, \vec{e}_q, \vec{k})$, le vecteur position $\overrightarrow{Om}$ s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} \quad \overrightarrow{Om} \quad \overrightarrow{mM} \quad p\vec{e}_p \quad z\vec{k}.$$

<u>Déplacement élémentaire:</u>

Le vecteur déplacement élémentaire $\overrightarrow{MM'}$ (M' très voisin de M) est:

$$\overrightarrow{MM'} \quad d\overrightarrow{OM} \quad d\overrightarrow{M} \quad dp\vec{e}_p \quad pdq\vec{e}_q \quad z\vec{k}.$$

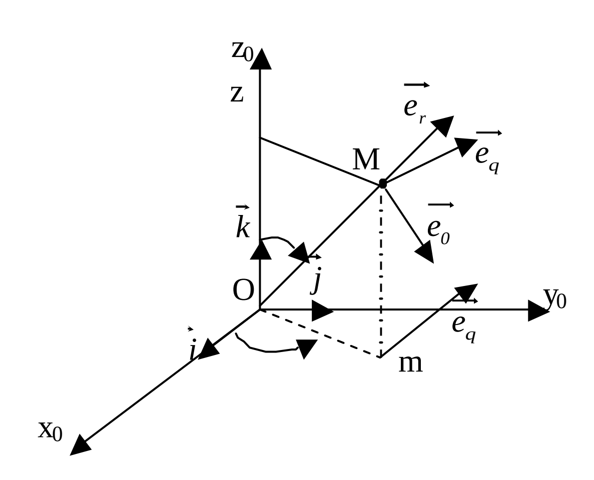
<u>Cas particulier:</u>

Si la trajectoire de M est plane, ce point peut être repéré par ses *coordonnées polaires* et .

III] Système de coordonnées sphériques.

Lorsque le problème présente une symétrie sphérique autour d'un point O que l'on prend pour origine du repère d'espace, il est pratique d'utiliser les coordonnées sphériques (r, θ, φ) de la particule à étudier telles que :

$r = \left|\overrightarrow{OM}\right|$; $\theta = angle(\overrightarrow{Oz_0}, \overrightarrow{OM})$; $\varphi = angle(\overrightarrow{Ox_0}, \overrightarrow{Om})$.



Quand M décrit tout l'espace,

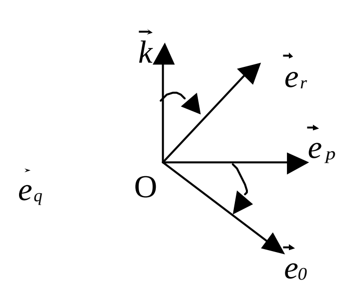
$$0 \le r < +\infty \;;\; 0 \le \varphi \le 2\pi \;;\; 0 \le \theta \le \pi .$$

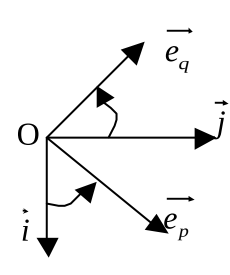
Une nouvelle base s'introduit alors : $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$. Où

$$\vec{e}_r = \sin\theta\,\vec{e}_p - \cos\theta\,\vec{k} = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{j} + \cos\theta\,\vec{k}$$

$$\vec{e}_\theta = \cos\theta\,\vec{e}_p - \sin\theta\,\vec{k} = \cos\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{j} - \sin\theta\,\vec{k}$$

$$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}.$$





Dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$, le vecteur position s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r .$$

<u>Déplacement élémentaire :</u>

Le déplacement élémentaire de la particule M en coordonnées sphériques est donné par:

$$d\overrightarrow{OM} = dr\,\vec{e}_r + rd\theta\,\vec{e}_\theta + r(\sin\theta)d\varphi\,\vec{e}_\varphi .$$

B) <u>CINEMATIQUE DU POINT MATERIEL.</u>

- L'objet de la cinématique est de décrire les mouvements d'une particule sans tenir compte des causes qui les produisent.
- La description du mouvement d'une particule met en œuvre trois vecteurs :
  - i) Le vecteur position.
  - ii) Le vecteur vitesse.
  - iii) Le vecteur accélération.
- Le corps mobile sera appelé ***point matériel***. On parle de point matériel lorsque les dimensions du mobile sont considérées négligeables dans les conditions du problème.
- En mécanique classique, la vitesse V du point M est négligeable par rapport à la vitesse de la lumière dans le vide.
-

I) Vecteur vitesse :

a) Vitesse moyenne.

Le vecteur vitesse moyenne d'une particule M qui se trouve à l'instant t_1 en M_1 et à l'instant t_2 en M_2 est donnée par:

$$\vec{V}_m(M) = \frac{\overrightarrow{OM}(t_2) - \overrightarrow{OM}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\overrightarrow{OM}_2 - \overrightarrow{OM}_1}{t_2 - t_1}$$

b) Vitesse instantanée.

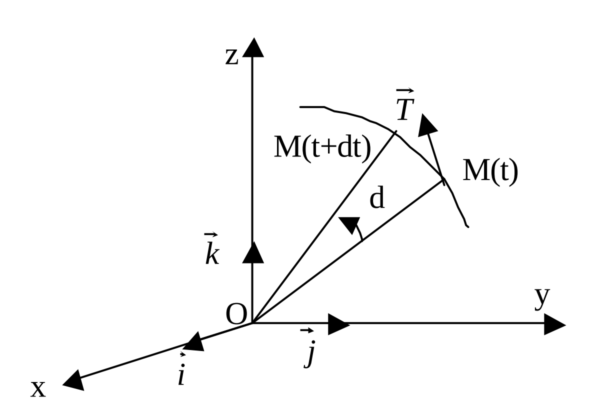
Le vecteur vitesse instantanée de la particule en M par rapport à un repère orthonormé R(O,xyz) est :

$$\vec{V}(M/R) = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{V}_m(M) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{OM}(t+\Delta t) - \overrightarrow{OM}(t)}{\Delta t},$$

donc $$\vec{V}(M/R) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R$$

b) Vitesse algébrique:

Dans ce cas, c'est la trajectoire elle même qui sert à repérer le mobile à l'aide de l'abscisse curviligne s (ou *coordonnée intrinsèque*) du point M. $\Delta s = \text{arc}(M(t)M(t+\Delta t))$.



Le vecteur vitesse est porté par le vecteur unitaire $\vec{T}$ tangent à la trajectoire.

La vitesse algébrique de M est $v \quad \frac{ds}{dt}$. Le vecteur vitesse instantanée peut donc s'écrire:

$$\dot{V}(M/R) \quad \frac{ds}{dt}\dot{T} \; .$$

II) Vecteur accélération.

La dérivée par rapport au temps du vecteur vitesse ci-dessus donne le vecteur accélération, qui s'écrit comme suit :

$$\vec{y}(M/R) \quad \frac{d^2 s}{dt^2}\vec{T} \quad \frac{ds}{dt}\frac{d\vec{T}}{dt}.$$

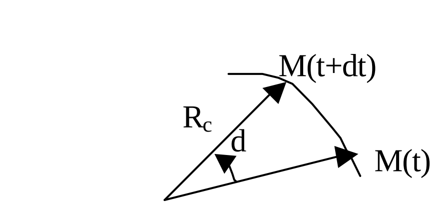
Or $\frac{d\vec{T}}{dt} \quad \frac{d\vec{T}}{d0}.\frac{d0}{dt}$ et

$\frac{d\vec{T}}{d0} \quad \vec{N}$ désigne le vecteur normal dirigé vers le centre de courbure de la trajectoire du point M.

Par ailleurs, nous avons, s=R_c ou ds=R_cd

Donc $\frac{d0}{dt} \quad \frac{1}{R_c}\frac{ds}{dt} \quad \frac{v}{R_c}$.

Par conséquent, $\frac{d\vec{T}}{dt} \quad \frac{v}{R_c}\vec{N}$.



Le vecteur accélération instantanée du point M s'écrit alors :

$$y(M/R) \quad \frac{dv}{dt}\vec{T} \quad \frac{v^2}{R_c}\vec{N} \quad y_t\vec{T} \quad y_n\vec{N} \quad \vec{y}_t \quad \vec{y}_n .$$

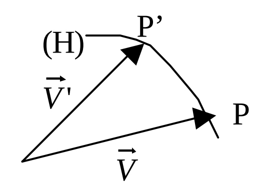
- La direction définie par le vecteur $\vec{N}$ est la normale principale en M à la trajectoire.
- Le vecteur unitaire $\vec{B} \quad \vec{T} \quad \vec{N}$ est appelé vecteur de la binormale.
- Le repère $(M;\vec{T},\vec{N},\vec{B})$ est le repère de ***Frenet-Serret.***

Hodographe du mouvement.

Définition :

L'hodographe d'un mouvement (noté (H)) est l'ensemble des point P tels que :

A tout instant, $\overline{OP} \quad \vec{V}(M/R)$; où O désigne le pôle de (H).



III) Composantes des vecteurs vitesse et accélération.

a) Coordonnées cartésiennes (x,y,z)

Soit un référentiel R(O,xyz) fixe muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Le vecteur position est :

$$\overrightarrow{OM} \quad x\vec{i} \quad y\vec{j} \quad z\vec{k}.$$

Le vecteur vitesse s'écrit alors :

$$\vec{V}(M/R) \quad \frac{dx}{dt}\vec{i} \quad \frac{dy}{dt}\vec{j} \quad \frac{dz}{dt}\vec{k} \quad \dot{x}\vec{i} \quad \dot{y}\vec{j} \quad \dot{z}\vec{k}$$

Les vecteurs unitaires $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont fixes dans le repère R, donc :

$$\left.\frac{d\vec{i}}{dt}\right|_R \quad \left.\frac{d\vec{j}}{dt}\right|_R \quad \left.\frac{d\vec{k}}{dt}\right|_R \quad \vec{0}.$$

Et l'accélération instantanée du point M s'écrit :

$$\vec{y}(M/R) \quad \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} \quad \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} \quad \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} \quad \ddot{x}\vec{i} \quad \ddot{y}\vec{j} \quad \ddot{z}\vec{k}.$$

b) Coordonnées cylindriques (p ,q ,z) :

Le vecteur position est

$$\overrightarrow{OM} \quad p\vec{e}_p \quad z\vec{k}.$$

Le vecteur déplacement élémentaire s'écrit :

$$d\overrightarrow{OM} \quad dp\vec{e}_p \quad pdq\vec{e}_q \quad dz\vec{k}.$$

Le vecteur vitesse est alors :

$$\vec{V}(M/R) \quad \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R \quad \frac{dp}{dt}\vec{e}_p \quad p\frac{dq}{dt}\vec{e}_q \quad \frac{dz}{dt}\vec{k}.$$

Ou bien $\vec{V}(M/R) \quad \dot{p}\vec{e}_p \quad p\dot{q}\vec{e}_q \quad \dot{z}\vec{k}.$

Le vecteur accélération est:

$$\vec{y}(M/R) \quad \left.\frac{d\vec{V}(M/R)}{dt}\right|_R \quad \ddot{p}\vec{e}_p \quad \dot{p}\left.\frac{d\vec{e}_p}{dt}\right|_R \quad \dot{p}\dot{q}\vec{e}_q \quad p\ddot{q}\vec{e}_q \quad p\dot{q}\left.\frac{d\vec{e}_q}{dt}\right|_R \quad \ddot{z}\vec{k},$$

Qui peut encore s'écrire:

$$\vec{y}(M/R) \quad \begin{pmatrix} \ddot{p} \quad p\dot{q}^2 \\ p\ddot{q} \quad 2\dot{p}\dot{q} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}_{\vec{e}_p, \vec{e}_q, \vec{k}}$$

Remarque:

Dans le cas d'un mouvement plan, nous avons z = 0 et le vecteur accélération s'écrit alors:

$$\vec{y}(M/R) \quad \ddot{p} \quad p\dot{q}^2 \qquad \textit{composante radiale.}$$

$$\vec{e}_p, \vec{e}_q \quad p\ddot{q} \quad 2\dot{p}\dot{q} \qquad \textit{composante orthoradiale.}$$

c) Coordonnées sphériques (r,è,ö)

La base associée à ce système de coordonnées est $(\vec{e}_r, \vec{e}_O, \vec{e}_q)$.

Nous rappelons que, le vecteur position est $\overrightarrow{OM} \quad r\vec{e}_r$ et le vecteur déplacement élémentaire s'écrit $d\overrightarrow{OM} \quad dr\vec{e}_r \quad rdO\vec{e}_O \quad r(\sin O)dq\vec{e}_q$.

- Le vecteur vitesse est alors: $\vec{V}(M/R) \quad \left.\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R \quad \dfrac{dr}{dt}\vec{e}_r \quad r\dfrac{dO}{dt}\vec{e}_O \quad r(\sin O)\dfrac{dq}{dt}\vec{e}_q$.

  Ou $\dot{V}(M/R) \quad \dot{r}\vec{e}_r \quad r\dot{O}\vec{e}_O \quad r(\sin O)\dot{q}\vec{e}_q$

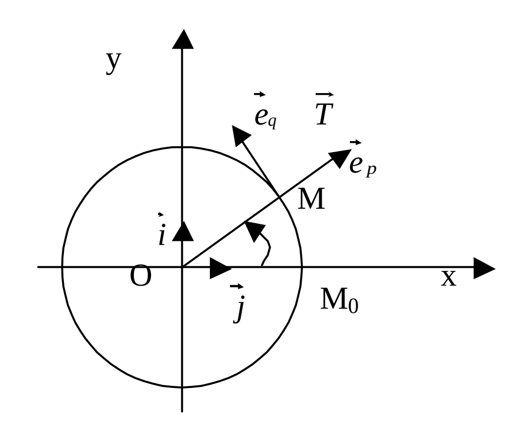
- Le vecteur accélération est:

$$\vec{y}(M/R) \quad (\ddot{r} \quad r\dot{O}^2 \quad r\dot{q}^2 \sin^2 O)\vec{e}_r \quad (2\dot{r}\dot{O} \quad r\ddot{O} \quad r\dot{q}^2 \cos O \sin O)\vec{e}_O \quad (2\dot{r}\dot{q}\sin O$$
$$2r\dot{O}\dot{q}\cos O \quad r\ddot{q}\sin O)\vec{e}_q$$

IV) Exemple de mouvement particuliers.

1) Mouvement circulaire.

Dans ce cas, le mobile se déplace sur un cercle (C) de rayon R et de centre O. Ce cercle est situé dans le plan (xOy). Pou étudier le mouvement de M, il préférable d'utiliser les coordonnées ses polaires (ñ,ö).



En coordonnées polaires, le vecteur position s'écrit: $\overrightarrow{OM} \quad p\vec{e}_p \quad R\vec{e}_p$.

Le vecteur vitesse du point M est: $\vec{V}(M/R) \quad R\dot{q}\vec{e}_q$,
et le vecteur accélération est donné par:

$$\vec{y}(M/R) \quad (\ddot{p} \quad p\dot{q}^{2})\vec{e}_p \quad (2\dot{p}\dot{q} \quad p\ddot{q})\vec{e}_q \quad R\dot{q}^{2}\,\vec{e}_p \quad R\ddot{q}\vec{e}_q .$$

Dans le cas où le mouvement circulaire est uniforme, nous avons:

ö = ùt et $\dot{q} \quad w \quad Cte$. Le vecteur vitesse de M devient: $\vec{V}(M/R) \quad Rw\vec{e}_q$, et le vecteur accélération se réduit à: $\vec{y}(M/R) \quad Rw^{2}\,\vec{e}_p$.

L'accélération du point M est alors normale à sa trajectoire (l'accélération tangentielle est nulle, car le module du vecteur vitesse est constant).

En coordonnées intrinsèques, l'arc $M_0M \quad s \quad Rq(t)$,

d'où $\vec{V}(M/R) \quad \frac{ds}{dt}\vec{T} \quad R\dot{q}\vec{T}$,

et l'accélération est $\vec{y}(M/R) \quad \frac{d^2s}{dt^2}\vec{T} \quad \frac{v^2}{R_c}\vec{N} \quad R\ddot{q}\vec{T} \quad R\dot{q}^{2}\,\vec{e}_q$.

Et $\vec{y}(M/R) \quad y_t\,\vec{e}_q \quad y_n\,\vec{e}_p$, donc $\vec{e}_q \quad \vec{T}$ et $\vec{e}_p \quad \vec{N}$.

Remarque: Le vecteur vitesse peut aussi s'écrire:

$$\vec{V}(M/R) \quad \vec{w} \quad \overrightarrow{OM} \quad w\vec{k} \quad R\vec{e}_p \quad Rw\vec{e}_q \quad Rw\vec{T} .$$

2) Mouvement à accélération centrale.

Un mouvement à accélération centrale est un mouvement dont l'accélération de la particule M, $\vec{y}(M/R)$, est parallèle au vecteur position $\overrightarrow{OM}$ à tout instant t. Il en découle $\overrightarrow{OM} \quad \vec{y}(M/R) \quad \vec{0}$.

Par ailleurs:

$$\overrightarrow{OM} \quad \vec{y}(M/R) \quad \frac{d[\overrightarrow{OM} \quad \vec{V}(M/R)]}{dt} \quad \vec{0} .$$

D'où $\overrightarrow{OM} \quad \vec{V}(M/R) \quad \vec{C}$.

$\vec{C}$ est un vecteur constant en module, en sens et en direction. $\vec{C}$ est alors perpendiculaire au plan formé par $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{V}(M/R)$. Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ et le vecteur vitesse $\vec{V}(M/R)$ appartiennent donc au même plan quelque soit l'instant t considéré.

Par conséquent, tout ***mouvement à accélération centrale*** est ***un mouvement plan***.
Pour étudier le mouvement du point M, il est alors préférable d'utiliser ses coordonnées polaires.

Nous rappelons que dans le cas général d'un mouvement plan les vecteurs position, vitesse et accélération s'écrivent, respectivement, comme suit:

$$\overrightarrow{OM} = \rho\vec{e}_\rho .$$

$$\vec{V}(M/R) = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{e}_\theta .$$

$$\vec{\gamma}(M/R) = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{e}_\theta .$$

Puisque l'accélération du point M est centrale (parallèle au vecteur position), elle doit s'écrire dans ce cas:

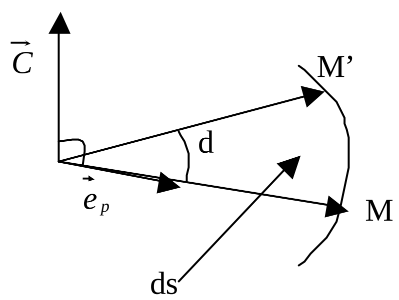
$\vec{\gamma}(M/R) = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{e}_\rho$, et donc sa composante orthoradiale est nulle:

$2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta} = 0$ qui peut s'écrire $\dfrac{1}{\rho}\dfrac{d(\rho^2\dot{\theta})}{dt} = 0$ d'où $\rho^2\dot{\theta} = Cte$.

Finalement, $\rho^2\dot{\theta} = C = \left|\overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}(M/R)\right|$, appelée constante des aires.

Loi des aires:

Calculons l'aire balayée, par unité de temps, par le rayon vecteur $\overrightarrow{OM} = \rho\vec{e}_\rho$.



$$\vec{C} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}(M/R)$$

$ds = \dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{MM'}\right|$, M' est très voisin de M.

Donc $ds = \left|\rho\vec{e}_\rho \wedge (d\rho\vec{e}_\rho + \rho d\theta\vec{e}_\theta)\right| = \dfrac{1}{2}\rho^2 d\theta$, et

$\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{C}{2}$ d'où $ds = \dfrac{C}{2}dt$ et $\int_0^s ds = \dfrac{C}{2}\int_0^t dt$.

Donc $s = \dfrac{C}{2}t$ où $\dfrac{C}{2}$ est la vitesse aréolaire (Cm²/s).

Ce résultat est appelé 2ème loi de Kepler.

Formules de BINET:

a) **cas de la vitesse:**

Dans le cas d'un mouvement à accélération centrale, le carré du module du vecteur vitesse est: $V^2 \quad \dot{p}^2 \quad p^2\dot{q}^2$.

$$\dot{p} \quad \frac{dp}{dt} \quad \frac{dp}{dq}\frac{dq}{dt}.$$

On pose $u \quad \frac{1}{p}$, donc $du \quad \frac{dp}{p^2}$ et $\frac{du}{dq} \quad \frac{1}{p^2}\frac{dp}{dq}$,

Ce qui donne $\frac{dp}{dq} \quad \frac{1}{u^2}\frac{du}{dq}$.

D'autre part,

$$C \quad p^2\dot{q} \text{ peut s'écrire } \dot{q} \quad Cu^2.$$

Et $V^2 \quad [\ (\frac{1}{u^2}\frac{du}{dq})]^2.C^2u^4 \quad \frac{1}{u^2}.C^2u^4$,

La première formule de BINET s'écrit:

$$\boxed{V^2 \quad C^2[(\frac{du}{dq})^2. \quad u^2]}$$

Cette formule permet de déterminer l'équation polaire ñ = ñ(ö) ou bien u = u(ö) connaissant la vitesse du point M et inversement.

b) cas de l'accélération

La deuxième formule de BINET permet de déterminer l'accélération de la particule étudiée si l'on connaît l'équation polaire et inversement.

Le mouvement du point M étant à accélération centrale, on a:

$\vec{y}(M/R) \quad (\ddot{p} \quad p\dot{q}^2)\vec{e}_p$ dont la valeur algébrique est $y \quad \ddot{p} \quad p\dot{q}^2$.

$$\ddot{p} \quad \frac{d\dot{p}}{dq}\frac{dq}{dt} \quad \frac{d}{dq}(\ C\frac{du}{dq}).Cu^2 \quad C^2u^2\frac{d^2u}{dq^2}.$$

Et $p\dot{q}^2 \quad \frac{1}{u}C^2u^4 \quad C^2u^3$.

La deuxième formule de BINET s'écrit alors

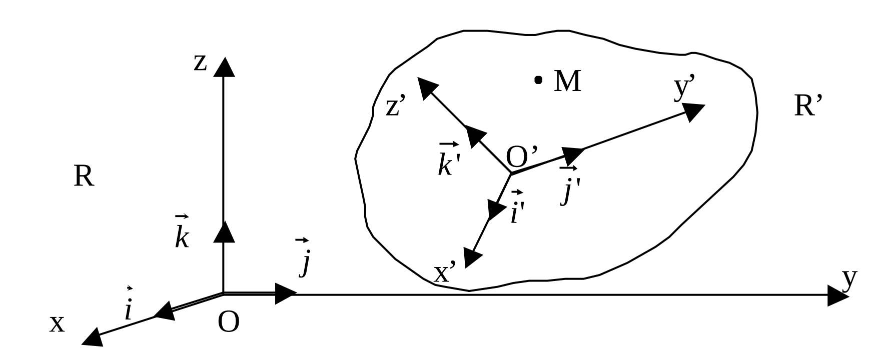
$$\boxed{y \quad C^2u^2[\frac{d^2u}{dq^2} \quad u]}$$

CHANGEMENTS DE REFERENTIELS

Soit à étudier le mouvement d'une particule M par rapport à un repère fixe R, appelé repère absolu. Il est parfois intéressant d'introduire un second repère R', dit repère relatif, par rapport au quel le mouvement de M soit simple à étudier.

Soient,

- R(O,xyz) un repère absolu (repère fixe).
- R'(O',x'y'z') un repère relatif (repère mobile par rapport à R).



R' peut être animé d'un mouvement de translation et/ou de rotation par rapport à R.

La rotation de R' par rapport à R se fait avec une vitesse angulaire (R'/R) telle que :

Dans le repère R,

$$\left.\frac{d\vec{i}'}{dt}\right|_R \quad \vec{w}(R'/R) \quad \vec{i}'$$

$$\left.\frac{d\vec{j}'}{dt}\right|_R \quad \vec{w}(R'/R) \quad \vec{j}'$$

$$\left.\frac{d\vec{k}'}{dt}\right|_R \quad \vec{w}(R'/R) \quad \vec{k}'$$

Dans R',

$$\left.\frac{d\vec{i}'}{dt}\right|_{R'} \quad \left.\frac{d\vec{j}'}{dt}\right|_{R'} \quad \left.\frac{d\vec{k}'}{dt}\right|_{R'} \quad \vec{0}.$$

1) Dérivation en repère mobile.

Soit $\vec{A}$ un vecteur quelconque. Dans le repère R, ce vecteur s'écrit

$$\vec{A} \quad x\vec{i} \quad y\vec{j} \quad z\vec{k}.$$

Dans le repère R' le vecteur $\vec{A}$ s'écrit,

$$\vec{A} \quad x'\vec{i} \quad y'\vec{j} \quad z'\vec{k}.$$

$$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_R \quad \dot{x}\vec{i} \quad \dot{y}\vec{j} \quad \dot{z}\vec{k} \quad \dot{x}'\vec{i}' \quad x'\left.\frac{d\vec{i}'}{dt}\right|_R \quad \dot{y}'\vec{j}' \quad y'\left.\frac{d\vec{j}'}{dt}\right|_R \quad \dot{z}'\vec{k}' \quad z'\left.\frac{d\vec{k}'}{dt}\right|_R ,$$

qui peut s’écrire aussi,

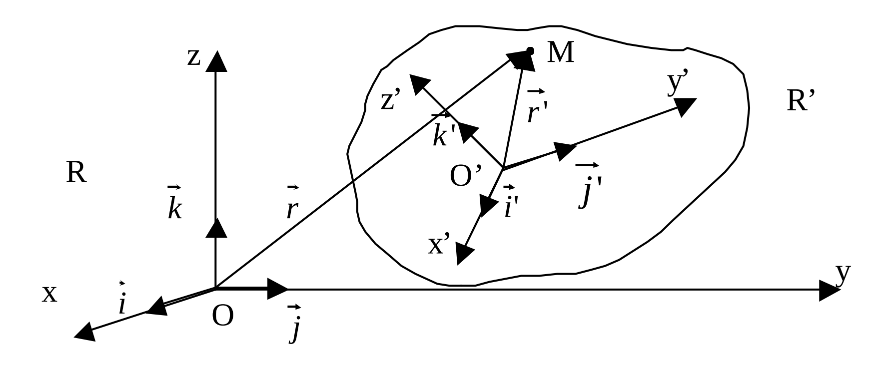
$$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{R} \quad \dot{x}'\vec{i}' \quad \dot{y}'\vec{j}' \quad \dot{z}'\vec{k}' \quad x'\vec{w}(R'/R) \quad x'\vec{i}' \quad y'\vec{w}(R'/R) \quad y'\vec{j}' \quad z'\vec{w}(R'/R) \quad z'\vec{k}'\ ,$$

Ou

$$\boxed{\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{R} \quad \left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{R'} \quad \vec{w}(R'/R) \quad \vec{A}}$$

2) <u>Composition des vitesses</u>

Soient R(O,xyz) un repère absolu et R’(O’,x’y’z’) un repère relatif.



Les vecteurs position de la particule M dans les repères R et R’ sont, respectivement :

$\overrightarrow{OM} \quad \vec{r}$ *et* $\overrightarrow{O'M} \quad \vec{r}'$.

On peut écrire,

$$\overrightarrow{OM} \quad \overrightarrow{OO'} \quad \overrightarrow{O'M}\,.$$

Donc la vitesse absolu du point M est,

$$\vec{V}_a(M) \quad \vec{V}(M/R) \quad \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{R} \quad \left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_{R} \quad \left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_{R} \quad \left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_{R} \quad \left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_{R'} \quad \vec{w}(R'/R) \quad \overrightarrow{O'M}..$$

Où

$$\vec{V}(M/R') \quad \vec{V}_r(M) \quad \left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_{R'}$$ désigne la vitesse relative du point M. Et ,

$$\vec{V}_e(M) \quad \left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_{R} \quad \vec{w}(R'/R) \quad \overrightarrow{O'M}\quad ,$$

est la vitesse d’entraînement de M. La vitesse d’entraînement de M est la vitesse absolu du point (imaginaire) qui coïncide avec M à l’instant t et supposé fixe dans le repère R’.

On peut aussi noter la vitesse d'entraînement de M comme suit,

$$\vec{V}_e(M) \quad \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R \quad (M \quad fixe\ dans\ \ R').$$

Nous avons donc,

$$\boxed{\vec{V}_a(M) \quad \vec{V}_r(M) \quad \vec{V}_e(M).}$$

3) Composition des accélérations.

L'accélération absolue du point M est,

$$\vec{y}_a(M) \quad \vec{y}(M/R) \quad \left.\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right|_R \quad \left.\frac{d\vec{V}_a}{dt}\right|_R .$$

$$\vec{y}_a(M) \quad \left.\frac{d(\vec{V}_r(M) \quad \vec{V}_e(M))}{dt}\right|_R$$

$$\left.\frac{d\vec{V}_r(M)}{dt}\right|_R \quad \frac{d}{dt}\left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_R \quad \left.\vec{w}(R'/R) \quad \overrightarrow{O'M}\right|_R$$

$$\left.\frac{d\vec{V}_r(M)}{dt}\right|_R \quad \left.\frac{d\vec{V}_r(M)}{dt}\right|_{R'} \quad \vec{w}(R'/R) \quad \vec{V}_r \quad \vec{y}_r(M) \quad \vec{w}(R'/R) \quad \vec{V}_r$$

$$\left.\frac{d}{dt}(\vec{w}(R'/R) \quad \overrightarrow{O'M})\right|_R \quad \frac{d\vec{w}(R'/R)}{dt} \quad \overrightarrow{O'M} \quad \vec{w}(R'/R) \quad \left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_R$$

Par conséquent l'accélération absolue peut s'écrire,

$$\vec{y}_a(M) \quad \vec{y}_r(M) \quad 2\vec{w}(R'/R) \quad \vec{V}_r(M)$$

$$\left.\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right|_R \quad \frac{d\vec{w}(R'/R)}{dt} \quad \overrightarrow{O'M}$$

$$\vec{w}(R'/R) \quad (\vec{w}(R'/R) \quad \overrightarrow{O'M}).$$

Dont

$$\left.\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right|_R \quad \frac{d\vec{w}(R'/R)}{dt} \quad \overrightarrow{O'M} \quad \vec{w}(R'/R) \quad (\vec{w}(R'/R) \quad \overrightarrow{O'M}) \quad \vec{y}_e(M) \ ,$$

désigne l'accélération d'entraînement, et

$$2\vec{w}(R'/R) \quad \vec{V}_r(M) \quad \vec{y}_c(M)$$

est l'accélération de Coriolis ou complémentaire.

Nous écrivons alors

$$\boxed{\vec{y}_a(M) \quad \vec{y}_r(M) \quad \vec{y}_e(M) \quad \vec{y}_c(M).}$$

<u>Cas particulier :</u>

Quand le repère R' est en translation par rapport à R,

$$\vec{w}(R'/R) \quad \vec{0}\ .$$

Par conséquent

$$\vec{V}_a(M) \quad \vec{V}_r(M) \quad \vec{V}_a(O')$$

et

$$\vec{y}_a(M) \quad \vec{y}_r(M) \quad \vec{y}_a(O').$$

Si en plus, R’ est en translation uniforme par rapport à R,

$$\vec{V}_a(O') \quad \overrightarrow{cte} \qquad et \qquad \boxed{\vec{y}_a(M) \quad \vec{y}_r(M).}$$

CHAPITRE 2

DYNAMIQUE DU POINT MATERIEL :
LOI FONDAMENTALE ET THEOREMES GENERAUX.

La dynamique est l'étude des mouvements en fonction des causes qui les produisent. Ces causes sont les interactions entre particules et sont représentées par les forces.

I) Loi fondamentale de la dynamique.

1) Principe d'inertie.

Lorsqu'un point matériel en mouvement n'est soumis à aucune force, son mouvement est rectiligne uniforme. C'est la première loi de Newton.

2) Loi fondamentale de la dynamique.

L'accélération d'un point matériel M en mouvement est proportionnelle à la résultante des forces qui s'exercent sur lui et inversement proportionnelle à sa masse :

$$\vec{F}_{ext} \quad m\vec{y}\ (M)$$

C'est la deuxième loi de Newton.

3) Axes de la mécanique.

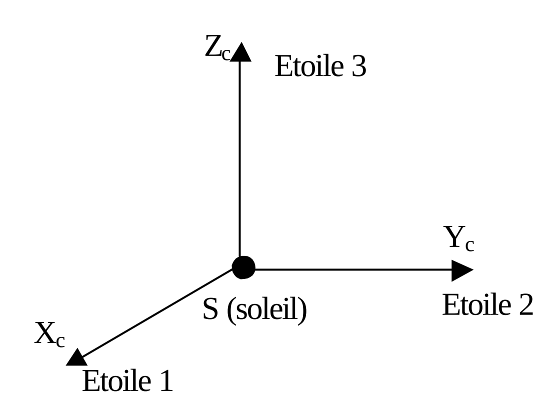
Nous avons vu au chapitre précédent,

$$\vec{y}_a(M) \quad \vec{y}_r(M) \quad \vec{y}_e(M) \quad \vec{y}_c(M).$$

Par conséquent, le principe fondamental de la dynamique ne s'écrira pas de la même manière dans R et dans R'.

Nous nous basons alors sur un résultat de mécanique céleste qui suppose que le principe fondamental de la dynamique est valable dans un système de référence appelé référentiel de Copernic. Ce référentiel est noté $R_c(S,X_cY_cZ_c)$.

Le repère $R_c(S,X_cY_cZ_c)$ a pour origine le centre du soleil. Ses trois axes sont dirigés suivant trois étoiles supposées fixes.



Remarque :

Si l'on étudie le mouvement du point M par rapport au repère R', avec R' en translation uniforme par rapport au repère de Copernic, la loi fondamentale de la dynamique sera aussi valable dans R'.

En effet,

$$\vec{y}(M\ /R_c) \quad \vec{y}\ \ (M\,/\,R_c)\ ,$$

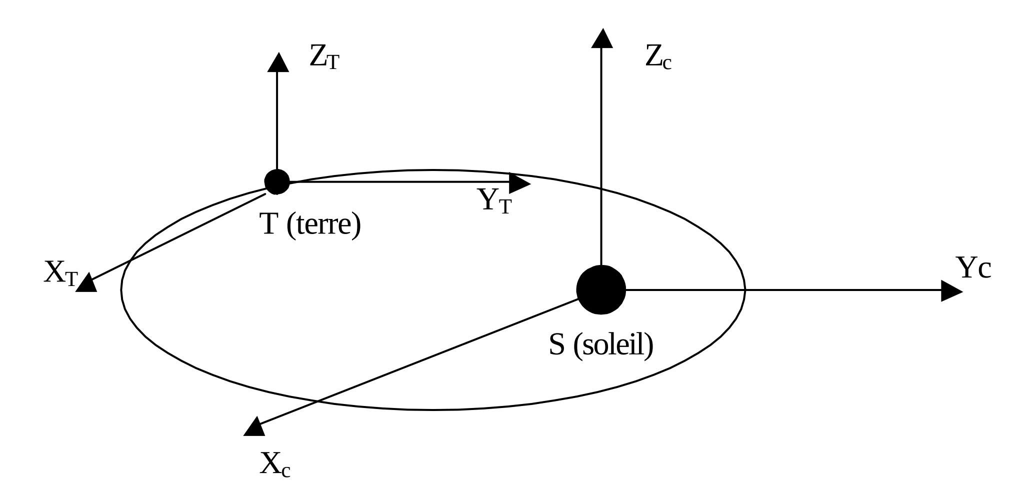
car

$$\vec{y}_e(M) \quad \vec{y}_c(M) \quad \vec{0}.$$

Définition :
Tout repère en translation rectiligne uniforme par rapport au repère de Copernic portera le nom de repère galiléen.

4) Dynamique terrestre.

Repère géocentrique.
Soient: $R_c(S,X_cY_cZ_c)$ le repère de Copernic et $R_T(T,X_TY_TZ_T)$ le repère géocentrique.
$R_T(T,X_TY_TZ_T)$ est un repère orthonormé dont l'origine T est le centre de la terre et les axes $\overrightarrow{TX}_T$, $\overrightarrow{TY}_T$ et $\overrightarrow{TZ}_T$ sont respectivement parallèles aux axes $\overrightarrow{SX}_c$, $\overrightarrow{SY}_c$ et $\overrightarrow{SZ}_c$ du repère de Copernic.



La terre tourne autour du soleil en une année. C'est le mouvement orbital elliptique.
La durée ô des expériences sur terre est très faible devant la période du mouvement orbital elliptique (ô << 365 jours).
Par conséquent, on suppose que le mouvement de la terre autour du soleil est rectiligne uniforme au cours d'une expérience donnée.
Le référentiel R_T est donc considéré comme référentiel galiléen. On peut alors écrire:

$$\vec{y}(M/R_T) \quad \vec{y}(M/R_c).$$

On définit aussi le repère R_L appelé référentiel du Laboratoire dont l'origine est un point L à la surface de la terre, de latitude ë et dont l'axe $\overrightarrow{LZ}_L$ est perpendiculaire à la surface du sol terrestre. R_L est en mouvement de rotation par rapport au repère R_T. C'est le mouvement de rotation de la terre sur elle-même. R_L est un repère non galiléen.

5) Loi fondamentale de la dynamique dans un référentiel non galiléen.

Soient R un référentiel galiléen et R' un référentiel non galiléen. R' est mobile par rapport à R.
R est le référentiel absolu. R' est le référentiel relatif.
On désigne par $\vec{y}_a(M)$ l'accélération du point M dans le repère R et par $\vec{y}_r(M)$ l'accélération du même point dans le repère R'.
La loi de composition des accélérations donne:

$$\vec{y}_a(M) \quad \vec{y}_r(M) \quad \vec{y}_e(M) \quad \vec{y}_c(M).$$

Le principe fondamental de la dynamique dans R s'écrit:

$$\vec{F}_{ext} \quad m\vec{y}_a(M) \quad m\vec{y}_r(M) \quad m\vec{y}_e(M) \quad m\vec{y}_c(M),$$

où m est la masse du point m et $\vec{F}_{ext}$ désigne la résultante de toutes les forces extérieures appliquées à M.

Dans le repère R', le principe fondamental de la dynamique est,

$$m\vec{y}_r(M) \quad m\vec{y}_a(M) \quad m\vec{y}_e(M) \quad m\vec{y}_c(M) \qquad \vec{F}_{ext} \quad \vec{F}_e \quad \vec{F}_c \ .$$

Où

$\vec{F}_e$ est la force d'inertie d'entraînement,

$\vec{F}_e$ est la force d'inertie de Coriolis ou complémentaire.

Dans le référentiel non galiléen, la loi fondamentale de la dynamique s'écrit de la même façon que dans le repère galiléen à condition de tenir compte des forces d'inertie $\vec{F}_e$ et $\vec{F}_c$.

6) Classification des forces.

a) Forces réelles (ou extérieures):

Les forces réelles sont de deux types,

- ***Forces à distance*:**

  Exemple : - Force d'attraction universelle.

  - Force électrostatique.

- ***Forces de contact:***

  Exemple: - Force de frottement.

  - Force élastique (cas d'un ressort).

b) Forces d'inertie (ou intérieure):

C'est la résistance que manifestent les corps au mouvement. Cette résistance est due à leur masse. Se sont,

- La force d'inertie d'entraînement: $\vec{F}_e \quad m\vec{y}_e$.
- La force d'inertie de Coriolis: $\vec{F}_c \quad m\vec{y}_c$.

Les forces $\vec{F}_e$ et $\vec{F}_c$ n'apparaissent que dans les repères galiléen.

7) Quantité de mouvement et moment cinétique.

1) Définition:

Soit un point matériel M de masse m et de vecteur vitesse $\vec{V}(M)$ dans un repère R(O,xyz) quelconque.

- La quantité de mouvement de M dans le repère R est

$$\vec{P}(M) \quad m\vec{V}(M) .$$

- Le moment cinétique de M par rapport au point fixe O est:

$$\vec{\sigma}_O(M) \quad \overrightarrow{OM} \quad \vec{P}(M) \quad \overrightarrow{OM} \quad m\vec{V}(M) .$$

- Le moment cinétique du point M par rapport à une droite (D), passant par O et de vecteur unitaire $\vec{u}$, est donnée par le scalaire,

$$\mathbf{M}_D(\vec{P}) \quad \vec{\sigma}_O(M).\vec{u} .$$

2) Théorème.

$$\frac{d\vec{P}(M)}{dt} \quad \left.\frac{d(m\vec{V}(M))}{dt}\right|_R \quad m\left.\frac{d\vec{V}(M)}{dt}\right|_R \quad m\vec{y}(M/R)$$

Donc

$$\left.\frac{d\vec{P}(M)}{dt}\right|_R \quad m\vec{y}(M/R) \qquad \vec{F}_{ext} \ .$$

La dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement n'est autre que la résultante des forces extérieures appliquées à la particule M (le repère R est supposé galiléen).

Dans le cas où R n'est pas galiléen:

$$\left.\frac{d\vec{P}(M)}{dt}\right|_R \quad m\vec{y}(M/R) \qquad \vec{F}_{ext} \quad \vec{F}_e \quad \vec{F}_c \, .$$

2) **Quantité d'accélération, moment dynamique, théorème du moment cinétique.**

a. **Définition du vecteur quantité d'accélération.**

On appel quantité d'accélération, $\vec{\ }(M)$, du point M par rapport à un repère R, le produit de sa masse m par son vecteur accélération $\vec{y}(M/R)$:

$$\vec{\ }(M/R) \quad m\vec{y}(M/R) \quad \left.\frac{d\vec{P}(M/R)}{dt}\right|_R \ .$$

b. **Moment dynamique du point M par rapport au point fixe O.**

Le moment dynamique, $\vec{\ddot{o}}_O(M/R)$, d'une particule M par rapport à un fixe O, dans un repère R, est par définition:

$\vec{\ddot{o}}_O(M/R) \quad \overrightarrow{OM} \quad \vec{\ }(M/R)$.

c. **Théorème du moment cinétique.**

$$\left.\frac{d\vec{c}_O(M)}{dt}\right|_R \quad \left.\frac{d(\overrightarrow{OM} \quad m\vec{V}(M))}{dt}\right|_R \quad \vec{V}(M) \quad m\vec{V}(M) \quad \overrightarrow{OM} \quad m\vec{y}(M/R) .$$

Donc: $\quad \vec{\ddot{o}}_O(M/R) \quad \left.\frac{d\vec{c}_O(M/R)}{dt}\right|_R \quad \overrightarrow{OM} \quad m\vec{\ }(M/R) \quad \overrightarrow{OM} \qquad \vec{F}_{ext}$.

Le moment dynamique d'une particule M, en un point fixe O, dans un repère galiléen R est égal au moment, en ce point, de la résultante de toutes les forces appliquées à M.

CHAPITRE III

TRAVAIL ET ENERGIE

I) Puissance et travail d'une force.

- La puissance instantanée d'un point matériel M est le produit scalaire de la résultante des forces qui agissent sur M par la vitesse de ce point:

$$\vec{F}.\vec{V}(M) \qquad \text{[Watts].}$$

- Le travail élémentaire fourni par un point matériel se déplaçant d'une quantité finie $d\overrightarrow{OM}$, est donné par,

$$dW \qquad \vec{F}.d\overrightarrow{OM}\ .$$

Comme $\vec{V}(M) \quad \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$, nous écrivons $dW \qquad \vec{F}.\vec{V}(M).dt \qquad .dt$.

II) Forces conservatives: Energie potentielle.

- Si une force $\vec{F}$ est conservative, alors elle dérive d'une énergie potentielle E_p. Donc cette force peut s'écrire:

$$\vec{F} \qquad \overrightarrow{grad}E_p\ .$$

L'énergie potentielle n'est définie qu'à une constante additive près ($\overrightarrow{grad}(Cte) \quad \vec{0}$).

- Pour qu'une force $\vec{F}$ soit conservative, il faut que :

$$\overrightarrow{rot}\vec{F} \quad \vec{0}.$$

Travail d'une force conservative

Soit $\vec{F}$ une force conservative. Son travail étant: $dW \quad \vec{F}.d\overrightarrow{OM}$.
Cette force est conservative, elle peut donc s'écrire

$$\vec{F} \qquad \overrightarrow{grad}E_p \qquad \begin{pmatrix} \frac{E_p}{x} \\ \frac{E_p}{y} \\ \frac{E_p}{z} \end{pmatrix}_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}} \quad \text{et} \quad d\overrightarrow{OM} \quad \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$$

$$dW \qquad \frac{E_p}{x}dx \quad \frac{E_p}{y}dy \quad \frac{E_p}{z}dz \qquad dE_p\ .$$

Le travail d'une force conservative pour déplacer un point matériel est égal à la diminution de son énergie potentielle.

II) Energie cinétique.

1) Définition:

L'énergie cinétique d'une particule M de masse m et de vecteur vitesse $\vec{V}(M)$ est le scalaire E_c défini par:

$$E_c \quad \frac{1}{2}mV^2(M)\ .$$

2) <u>Théorème:</u>

Le travail de la résultante, $\vec{F}$, de toutes les forces (conservatives et non conservatives) appliquées à un point matériel M, dans un référentiel quelconque R_0, entre la position initiale A et la position finale B, est égale à la variation de son énergie cinétique entre A et B

<u>Démonstration:</u>

Le travail de la résultante des forces, $\vec{F}$, quand la particule se déplace de la position A à la position B, est

$$W_{A \quad B}\Big|_{R_0} \quad {}_{AB} \quad \vec{F}.d\vec{M} \quad m\frac{d\vec{V}(M/R_0)}{dt}d\vec{M} \quad {}_{AB} \quad m\vec{V}(M/R_0).d\vec{V}(M/R_0)$$

Car $\quad \overrightarrow{dM} \quad \vec{V}(M/R_0)dt$

Donc

$$W_{A \quad B}\Big|_{R_0} \quad {}_{V(M \quad A)}^{V(M \quad B)} d(\frac{1}{2}mV^2(M/R_0)),$$

et

$$W_{A \quad B}\Big|_{R_0} \quad \frac{1}{2}mV^2(M \quad B) \quad \frac{1}{2}mV^2(M \quad A).$$

D'où

$$\boxed{W_{A \quad B} \quad E_c(B/R_0) \quad E_c(A/R_0),}$$

et

$$\boxed{dW \quad dE_c.}$$

III) <u>Enérgie mécanique.</u>

1) <u>Définition.</u>

On appel énergie mécanique (ou énergie totale) $E_m(M/R_0)$ d'une particule M, la somme de ses énergies cinétique $E_c(M/R_0)$ et potentielle $E_p(M/R_0)$:

$$\boxed{E_m(M/R_0) = E_c(M/R_0) + E_p(M/R_0)}$$

2) **<u>Cas d'un système conservatif.</u>**

<u>Définition.</u>

Une particule M constitue un système conservatif si les seules forces, appliquées à cette particule, qui travaillent au cours du mouvement, dérivent d'un potentiel.

Dans ce cas, nous avons :

$$dW = -dE_p.$$

D'autre part ,

$$dW = dE_c.$$

Donc

$$dE_c = -dE_p \text{ ou } d(E_c + E_p) = dE_m = 0.$$

Par conséquent : $\boxed{E_m = Cte.}$

L’énergie mécanique $E_m(M/R_0)$, d’un système conservatif, reste constante au cours du mouvement et conserve sa valeur initiale.

V) <u>Stabilité d'un équilibre</u>.

Soit un référentiel R(O,xyz), et soit un point matériel M soumis à des forces conservatives dont la résultante $\vec{F}$:

Nous avons, $\vec{F} \quad \overrightarrow{grad} E_p$.

Donc, $F_x \quad \frac{E_p}{x}$, $F_y \quad \frac{E_p}{y} \quad et \quad F_z \quad \frac{E_p}{z}$.

Si le point M est à l'équilibre, $\vec{F} \quad \vec{0}$ et par conséquent:

$\frac{E_p}{x} \quad \frac{E_p}{y} \quad \frac{E_p}{z} \quad 0$. L'énergie potentielle est donc extrémale (E_p est minimale ou maximale).

On dit que l'équilibre est stable quand le point M est soumis à une force de rappel qui le ramène à sa position d'équilibre. Dans le cas contraire, l'équilibre est dit instable.

a) <u>E_p minimale (équilibre stable).</u>

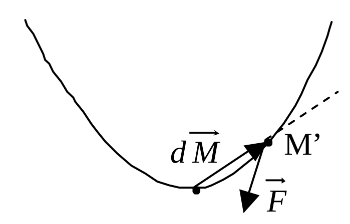
Soit M la position d'équilibre et M' est très voisin de M.

On a: l'énergie potentielle en M', E_p(M'), est supérieure à celle en M, E_p(M).

Hors équilibre, la force exercée pour déplacer la particule de M vers M' est non nulle. Son travail de M vers M' est donné par:

$$dW \quad \vec{F}.d\vec{M} \quad dE_p \quad 0.$$

La force $\vec{F}$ est alors une force de rappel. Elle ramène la particule M à sa position d'équilibre.

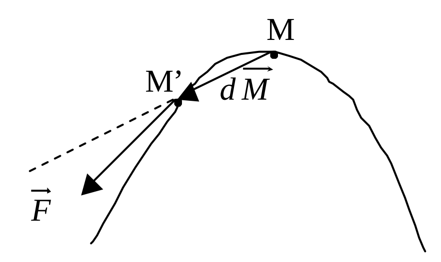


<u>b) Energie potentielle maximale (équilibre instable).</u>

Dans ce cas, l'énergie potentielle de la particule en M' est inférieur à celle en M'. Donc $dE_p \quad 0$.

Le travail élémentaire effectuer par la force $\vec{F}$ pour déplacer la particule de la position M à la position M' est: $dW \quad \vec{F}.d\vec{M} \quad dE_p \quad 0$.

Par conséquent la force $\vec{F}$ tend à éloigner le point M de sa position d'équilibre.



CHAPITRE IV

MOUVEMENTS A FORCE CENTRALE

I) Définition

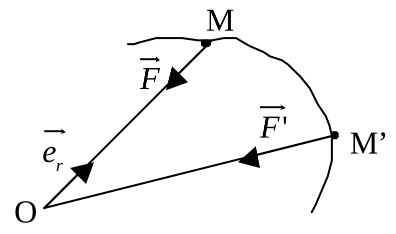
Une force $\vec{F}$ est centrale si sa ligne d'action passe constamment par un point O appelé pôle. Le vecteur position et la force appliquée à la particule sont alors dirigés suivant le même vecteur unitaire $\vec{e}_r$ relatif aux coordonnées polaires de M.

Nous avons alors,

$$\overrightarrow{OM} \quad r\vec{e}_r ,$$

et

$$\vec{F} \quad F.\vec{e}_r \quad \text{(force radiale).}$$



Donc le moment de la force $\vec{F}$ par rapport au point O est: $\overrightarrow{OM} \quad \vec{F} \quad \vec{0}$.

Exemples de forces centrales:

- Force d'interaction gravitationnelle entre deux masses m et M distantes de r:

$$\vec{F} \quad \frac{GmM}{r^2}\vec{e}_r .$$

Où G désigne la constante d'attraction universelle.

- Force d'interaction électrostatique entre deux particules de charges électrostatiques q_1 et q_2 distantes de r:

$$\vec{F} \quad \frac{1}{4pc_0}\frac{q_1 q_1}{r^2}\vec{e}_r .$$

c_0 est la permittivité du vide.

II) Propriétés des mouvements à force centrale.

- Le moment cinétique de la particule M par rapport à un point fixe O, dans un repère R, est constant.

$$\left.\frac{d(\vec{c}_O(M/R))}{dt}\right|_R \quad \overrightarrow{OM} \quad \vec{F} \quad \vec{0} .$$

Donc le moment cinétique de M s'écrit:

$$\vec{c}_O(M/R) \quad \overrightarrow{OM} \quad m\vec{V}(m/R) \quad m\vec{C} \quad \overrightarrow{OM_0} \quad m\vec{V_0}(m/R) ,$$

où M_0 et $\vec{V}_0(M/R)$ sont la position et la vitesse initiales de M dans R.

Si le vecteur $\vec{C}$ est nul, alors le vecteur vitesse $\vec{V}(M/R)$ et le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ sont parallèles. Le mouvement est alors rectiligne.

Si le vecteur $\vec{C}$ est non nul, les vecteurs position $\overrightarrow{OM}$ et vitesse $\vec{V}(M/R)$ appartiennent à un plan perpendiculaire à $\vec{C}$. La trajectoire du point M est alors plane.

- les mouvements à force centrale vérifient la loi des aires:

En effet, supposons que la trajectoire de la particule M est situé dans le plan (xOy) d'un repère R(O,xyz), nous aurons,

le vecteur position $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$, le vecteur vitesse $\vec{V}(M/R) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ et le vecteur moment cinétique $\vec{\sigma}_O(M/R) = mr^2\dot{\theta}\vec{k}$. La constante des aires s'écrit alors,

$$\boxed{C = r^2\dot{\theta}.}$$

- L'énergie cinétique d'une particule M soumise à une force centrale est

$$E_c(M) = \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}mC^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right]$$. C'est ***la première formule de Binet***.

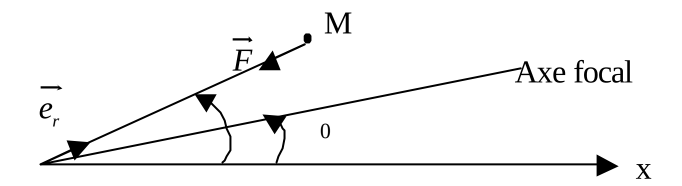
  Avec u=1/r.

- La force s'exerçant sur une particule est:

$$\vec{F} = m\vec{\gamma}(M/R) = -mC^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right)\vec{e}_r$$. C'est ***la deuxième formule de Binet.***

III <u>Champ Newtonien.</u>

On considère un axe polaire de référence $\overrightarrow{Ox}$ pris dans le plan de la trajectoire, et repérons la position du point matériel M par ses coordonnées polaires (r,θ).



Un champ Newtonien est un champ de forces dont l'expression est de la forme:

$$\vec{F} = -\frac{k}{r^2}\vec{e}_r = -k\frac{\vec{r}}{r^3}. \qquad \text{K est une constante.}$$

Si la constante k est positive, la force est attractive.
Si k est est négative la force est répulsive.

La force $\vec{F}$ étant centrale. Donc,

$$\vec{F} = -mC^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right)\vec{e}_r$$

$$\vec{F} = -\frac{k}{r^2}\vec{e}_r = -ku^2\vec{e}_r$$

Par conséquent,

$$mC^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right) = ku^2.$$

La solution u = 0 correspond à r infini et ne présente donc aucun intérêt.

Il reste alors: $\dfrac{d^2u}{d\theta^2} + u = \dfrac{k}{mC^2}$.

C'est une équation différentielle du second ordre à coefficients et second membre constants.
La solution générale de cette équation est la suivante:

$$u(\theta) = u_0\cos(\theta - \theta_0) + \frac{k}{mC^2},$$

où $u_0\cos(\theta-\theta_0)$ est al solution de l'équation sans membre et $\frac{k}{mC^2}$ est la solution particulière de l'équation différentielle ci-dessus.
Les constantes u_0 et φ_0 sont déterminées à partir des conditions initiales.

On pose $P = \frac{mC^2}{|k|} = \frac{C_O^2}{m|k|}$ ou bien $\frac{\varepsilon}{P} = \frac{k}{mC^2} = \frac{mk}{C_O^2}$ et $e = Pu_0$,
avec $\varepsilon = +1$ si $k > 0$, et $\varepsilon = -1$ si $k < 0$.

L'équation de la trajectoire de la particule M s'écrit donc,

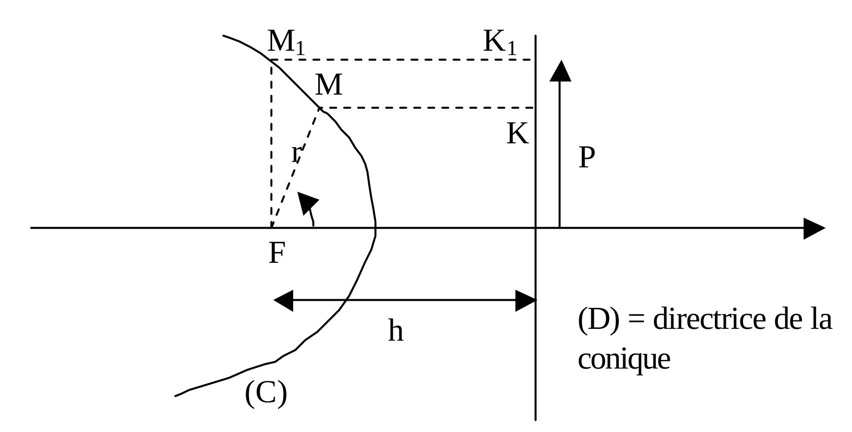
$$u(\theta) = \frac{e}{P}\cos(\theta-\theta_0) + \frac{\varepsilon}{P} \quad \text{ou bien} \quad r(\theta) = \frac{P}{\varepsilon + e\cos(\theta-\theta_0)}.$$

C'est l'équation en coordonnées polaires d'une conique de paramètre P et d'excentricité e, dont l'axe focal fait un angle φ_0 avec l'axe polaire et dont l'un des foyers coïncide avec le point O.

N.B.
Dans la suite de ce chapitre, nous prendrons $\varphi_0 = 0$ et $\varepsilon = +1$ (cas des forces attractives correspondant au mouvement des planètes et des satellites du système solaire). L'équation de la trajectoire se réduit donc à:

$$r(\theta) = \frac{P}{1 + e\cos\theta}.$$

1) Recherche de l'équation de la conique par la méthode géométrique.



L'excentricité de la conique est donnée par: $e = \frac{MF}{MK}$.

Donc $MK = \frac{MF}{e} = \frac{r}{e} = h - r\cos\theta$.

Or $\frac{P}{h} = e$ et donc $h = \frac{P}{e}$.

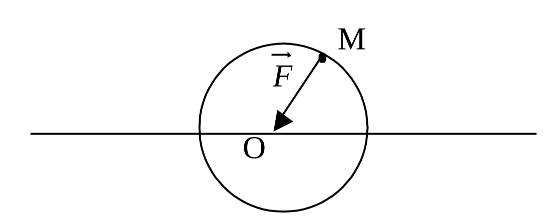
D'où $\frac{r}{e} = \frac{P}{e} - r\cos\theta$ ou bien $r = \frac{P}{1 + e\cos\theta}$.

2) Classification de la trajectoire de M en fonction de son excentricité e.

a) e = 0.

r(ö) = P = R, la trajectoire de la particule est un cercle de centre O et de rayon

$R = P = \frac{mC^2}{k}$.



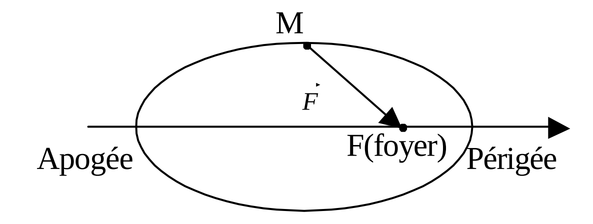
b) 0 < e < 1. La trajectoire de M est une ellipse.

Dans le cas d'une orbite autour de la terre:

- Le périgée est le point le plus rapproché de la terre. Il correspond à ö = 0 et donc $r_p = \frac{P}{1+e} = r_{min}$.
- L'apogée est le point le plus éloigné de la terre. Il est donné pour ö = ð et $r_A = \frac{P}{1-e} = r_{max}$.

Dans le cas d'une orbite autour du soleil:

- le périhélie est le point le plus proche du soleil.
- L'aphélie est le point le plus éloigné du soleil.



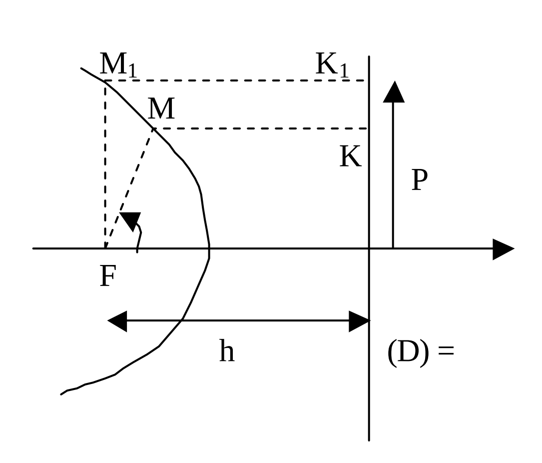
c) e = 1. La trajectoire du point M est une parabole.

$r = \frac{P}{1+\cos\theta}$

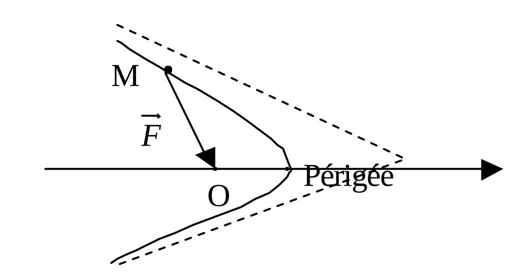
L'angle ö = 0 correspond à $r_p = \frac{P}{2}$,

et $e = \frac{FM}{MK} = 1$.

Pour ö = ð/2, P = r = FM_1.



d) e> 1. La trajectoire de M est une hyperbole. Dans un tel cas, seule une branche de l'hyperbole pourrait être parcourue puisque le mobile ne pourrait pas passer d'une branche à l'autre.



3) **<u>Classification de la nature de la trajectoire du point M en fonction de son énergie mécanique.</u>**

Soit une particule M, de masse m, soumise de la part de l'origine O d'un référentiel galiléen R_0 à une force attractive:

$$\vec{F} \quad \frac{k}{r^2}\vec{e}_r .$$

La force $\vec{F}$ est conservative, elle peut donc s'écrire:

$$\vec{F} \quad \overrightarrow{grad} E_p(M) .$$

Dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$, nous avons:

$$\frac{k}{r^2} \quad \frac{E_p(r)}{r} \qquad (1)$$

$$0 \quad \frac{1}{r}\frac{E_p(r)}{\theta} \qquad E_p(r) \quad indépendant\ de\ \theta.$$

L'équation (1) montre que l'énergie potentielle peut s'écrire :

$$E_p(r) \quad \frac{k}{r} \quad cte.$$

La constante est nulle si l'énergie potentielle est nulle à l'infini.
L'énergie cinétique est déduite de la première formule de Binet :

$$E_c(M) \quad \frac{1}{2}mV^2 \quad \frac{1}{2}mC^2 \; (\frac{du}{d\theta})^2 \quad u^2$$

Avec

$$u \quad \frac{1}{r} \quad \frac{1 \quad e\cos\theta}{P}.$$

L'énergie cinétique est alors,

$$E_c(M) \quad \frac{1}{2}mC^2 \; \frac{e^2}{P^2}\sin^2\theta \quad \frac{(1 \quad e\cos\theta)^2}{P^2} \quad \frac{k}{2P}(e^2 \quad 1 \quad 2e\cos\theta).$$

Car

$$\frac{mC^2}{P} \quad k.$$

L'énergie potentielle,

$$E_P \quad \frac{k}{r} \quad ku \quad \frac{k}{P}(1 \quad e\cos\theta).$$

Finalement, l'énergie mécanique du point M est,

$$E_m \quad \frac{k}{2P}(1 \quad e^2).$$

Cette expression montre que E_m est constante et égale à

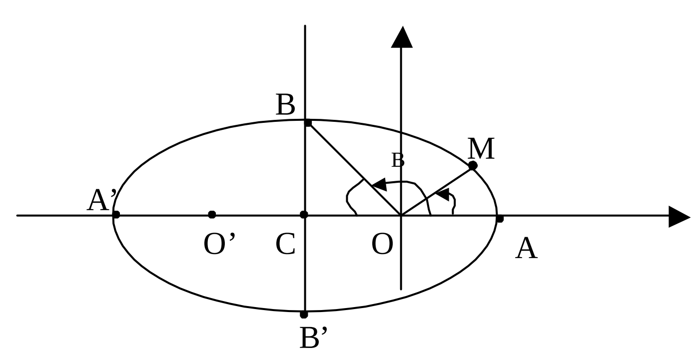
$$E_m \quad \frac{1}{2}mV_0^2 \quad \frac{k}{r_0} \quad Cte.$$

Les conditions initiales $\vec{r}_0$ et $\vec{V}_0$ déterminent E_m et le moment cinétique $\vec{\sigma}_0$ ($\vec{\sigma}_0 \quad \vec{r}_0 \quad m\vec{V}_0$).

La nature de la trajectoire de la particule M dépendra donc de la valeur de son énergie mécanique $E_m(M/R_0)$:

- e = 0, E_m=-k/2P < 0, la trajectoire de M est un cercle.
- 0 < e < 1, -k/2P < E_m < 0, la trajectoire de M est une ellipse.
- e = 1, E_m = 0, la trajectoire est une parabole.
- e > 1, E_m > 0 la trajectoire de M est une hyperbole.

4) caractéristiques de la trajectoire elliptique.



Soient : a = CA = C'A'.
b = CB = CB'.
c = OC =O'C.

L'équation de la conique est:

$$r \quad \frac{P}{1 \quad e\cos\theta}.$$

$$\theta \quad 0 \qquad r_{\min} \quad \frac{P}{1 \quad e}.$$

$$\theta \quad \pi \qquad r_{\max} \quad \frac{P}{1 \quad e}.$$

$$r_{\min} \quad r_{\max} \quad 2a \quad \frac{P}{1 \quad e} \quad \frac{P}{1 \quad e} \qquad \boxed{P \quad a(1 \quad e^2).}$$

$$r_{\min} \quad r_{\max} \quad 2c \quad \frac{P}{1 \quad e} \quad \frac{P}{1 \quad e} \qquad \boxed{P \quad \frac{c}{e}(1 \quad e^2).}$$

D'où

$$\boxed{e \quad \frac{c}{a}.}$$

Pour,

$$\theta \quad \theta_B \qquad r_B \quad \frac{P}{1 \quad e\cos\theta_B} \quad \frac{P}{1 \quad e\cos ci} \quad \frac{P}{1 \quad \frac{c \quad c}{a \quad r_B}}.$$

Donc,

$$P \quad r_B \quad \frac{c^2}{a} \qquad r_B \quad a(1 \quad e^2) \quad ae^2 \quad a \qquad r_B \quad a.$$

et

$$\boxed{a^2 \quad b^2 \quad c^2.}$$

On en déduit encore que

$$\frac{b^2}{a} \quad a \quad \frac{c^2}{a} \quad a(1 \quad \frac{c^2}{a^2}) \quad a(1 \quad e^2) \quad P.$$

Par conséquent,

$$\boxed{P \quad \frac{b^2}{a}.}$$

IV) **Troisième loi de Kepler.**

On considère une particule M soumise à une force attractive et dont l'énergie mécanique est telle que:

$$\frac{k}{2P} \quad E_m \quad 0.$$

La trajectoire du point M est alors elliptique.
Avant d'établir la troisième loi de Kepler, nous rappelons ses deux premières lois:

- **1ère loi de Kepler:**

Le mouvement d'un point matériel M est périodique de période T.

- **2ère loi de Kepler:**

Le rayon vecteur dans le cas d'un mouvement à force centrale balaye des aires égales pendant des intervalles de temps égaux:

$$S \quad \frac{C}{2}t \quad S_0.$$

La vitesse aréolaire du point M est:

$$A \quad \frac{dS}{dt} \quad \frac{1}{2}C \quad \frac{S}{T} \quad \frac{tab}{T}.$$ (avec ÄS = S – S_0)

Donc

$$A^2 \quad (\frac{tab}{T})^2 \quad \frac{C^2}{4}.$$

a et b sont respectivement le demi-petit et le demi-grand axe de l'ellipse.
En tenant compte de

$$P \quad \frac{mC^2}{k} \quad ,$$

nous écrivons,

$$A \quad \frac{P\ k}{4\ m} \quad \frac{tab}{T}^{\ 2}.$$

Sachant que,

$$P \quad \frac{b^2}{a},$$

nous aurons,

$$T^2 = \frac{4m\boldsymbol{t}^2}{k} a^3 .$$

C'est ***la troisième loi de Kepler.***

Donc le carré de la période, T^2, est proportionnelle au cube de demi-grand axe de l'ellipse.

V) <u>Satellites artificiels.</u>

1) <u>Vitesse de libération V_l.</u>

Soit un engin spatial de masse m tel que son énergie mécanique E_m est:

$$E_m = \frac{1}{2} m V_0^2 + \left(-\frac{G M_T m}{r_0} \right),$$

où M_T désigne la masse de la terre et r_0 est la distance de la terre à l'engin.
D'autre part , l'énergie mécanique s'écrit,

$$E_m = -\frac{k}{2P}(1 - e^2). \qquad \text{Avec } k = GM_Tm.$$

Nous rappelons que,

- si Em < 0, la trajectoire de l'engin est circulaire ou elliptique (0 < e < 1).
- si Em > 0, la trajectoire du satellite est hyperbolique (e > 1).
- si Em = 0 (e = 1), la trajectoire du satellite est parabolique. Ce qui correspond à une vitesse initiale V_0 telle que:

$$V_0 = \sqrt{\frac{2GM_T}{r_0}} = V_l .$$

V_l est appelé vitesse de libération du satellite. Cette vitesse dépend de l'altitude du satellite et du rayon de la terre.

Par conséquent,

- si la vitesse initiale de l'engin est supérieure ou égale à sa vitesse de libération, sa trajectoire est parabolique ou hyperbolique et donc celui-ci s'éloigne indéfiniment de la terre.
- si $0 \le V_0 < V_l$, la trajectoire du satellite est fermée. Celle-ci est circulaire ou elliptique.

<u>Exemples:</u>

a) Au niveau du sol terrestre: $r_0 = 6400 km$, donc $V_l = 11.2 km/s$.

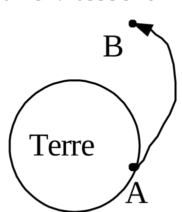
b) Au niveau du sol lunaire: $r_0 = 1700 km$, ce qui correspond à $V_l = 2.4 km/s$.

Cette dernière vitesse est comparable à la vitesse de l'agitation thermique des molécules gazeuses, ce qui explique l'absence de l'atmosphère au niveau de la lune.

2) <u>Mise sur orbite d'un satellite.</u>

C'est une opération qui se déroule en deux étapes:

i) Lancement à partir d'une station terrestre A.
En A, le lancement se fait avec une vitesse $0 \le V_0 < V_l$ (c'est la phase balistique).



ii) La satellisation (mise sur orbite) se fait en B grâce à une deuxième accélération qui fournira l'accroissement nécessaire de la vitesse.
B est généralement le périgée de l'ellipse.

VI) Satellite géostationnaire.

Un satellite géostationnaire est un satellite qui paraît fixe pour un observateur terrestre.
C'est donc un engin qui a la même vitesse de rotation que celle de la terre.
Le principe fondamental de la dynamique donne:

F = M ã(M)

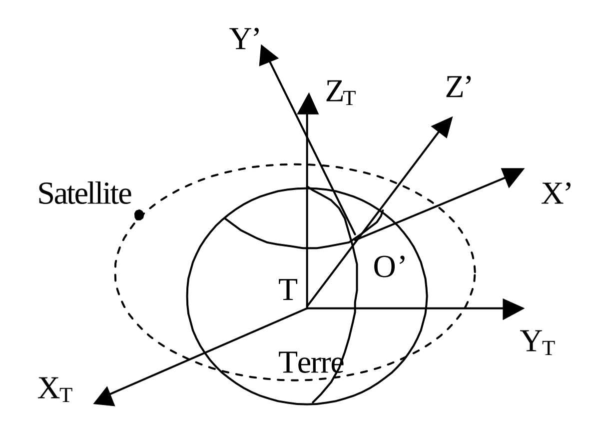
Qui se traduit par,

$$m\frac{GM_T}{r_0^{\,2}} \quad my \quad m\frac{V_0^{\,2}}{r_0}$$

(la force de gravitation équilibre la force centrifuge).
Donc,

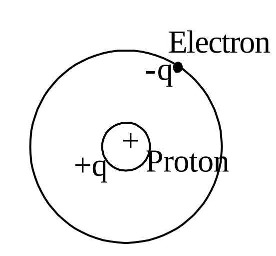
$$V \quad \sqrt{\frac{GM_T}{r_0}} \quad \frac{V_l}{\sqrt{2}}$$

, ce qui correspond bien à $V_0 \quad V_l$.



VI) Atome d'hydrogène. Modèle de BOHR.

L'atome d'hydrogène est formé d'un électron qui tourne autour d'un proton.
Classiquement, cet électron doit perdre de l'énergie Sous forme de rayonnement électromagnétique et "tombe" sur le proton. Or cette situation ne se Produit pas.



Modèle de Bohr (modèle semi-classique).

Bohr a supposé que l'électron tourne autour du proton sur des orbites circulaires ayant des rayons bien définis, et il postule:
Le moment cinétique de l'électron par rapport au centre du cercle s'écrit.

$$\boldsymbol{c}_O \quad n\frac{h}{2\boldsymbol{t}} \quad n\bar{h}.$$

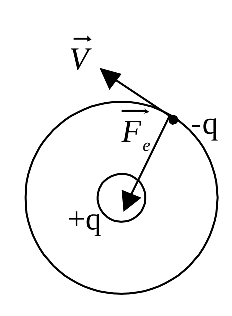
Où n est un entier naturel non nul et $h \quad 6.62 \quad 10^{\;34}\, J.s$ est la constante de Planck.

Calcul des rayons des cercles de Bohr:

Nous avons,

$$\boldsymbol{c}_O \quad n\frac{h}{2\boldsymbol{t}} \quad mVr \qquad\qquad r \quad \frac{nh}{2\boldsymbol{t}}.\frac{1}{mV},$$

d'une part.
D'autre part,
Le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'électron est:



$$\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r^2} = m\frac{V^2}{r}.$$

Finalement, le rayon de l'orbite de l'électron est:

$$\boxed{r_n = \frac{h^2\varepsilon_0}{\pi q^2 m}.n^2.}$$

Pour 1ère orbite de Bohr: n = 1, $r_1 = 0.53\,\mathring{A}$. $(1\mathring{A} = 10^{-10}m)$.

Pour n = 2, $r_2 = 4\,r_1$.

Calcul de l'énergie E de l'électron sur les orbites de Bohr:

On a: $E = -\frac{k}{2P}(1 - e^2)$.

Dans le cas du cercle (e = 0): $E = -\frac{k}{2P}$, avec $P = \frac{C_0^2}{mk}$,

Donc $E = -\frac{mk^2}{2C_0^2}$.

L'électron est soumis de la part du proton à une force électrostatique:

$$\vec{F}_e = \frac{(-q)(+q)}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r^2}\vec{e}_r.$$

$\vec{F}_e$ une force newtonienne avec $k = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}$.

D'où, l'énergie de l'électron s'écrit,

$$E = -\frac{mq^4}{16\varepsilon_0^2\pi^2}\cdot\frac{1}{2}\frac{4\pi^2}{n^2h^2} = -\frac{mq^4}{8\varepsilon_0^2\pi^2}\frac{1}{n^2}.$$

Donc l'énergie de la particule dépend de l'entier n et s'écrit,

E = E(n) $\qquad E_n = -Cte.\frac{1}{n^2}$.

On pose

$$E_n = -\frac{hRc}{n^2}.$$

Constantes numériques:

$R = \frac{mq^4}{8\varepsilon_0^2 h^3 c} = 1.0973\times10^7 m^{-1}$. (constante de Rhydberg).

$c = 3\times10^8 m/s$. (célérité de la lumière.)

$\varepsilon_0 = 8.86\times10^{-12} F/m$. (permittivité du vide).

$m = 0.9\times10^{-30} kg$. (masse de l'électron).

Pour n = 1: E_1 = - 13.6 eV.

Pou n = 2: $E_2 = \frac{E_1}{2} = -\frac{13.6}{2} eV$ …

CHAPITRE 5:

OSCILLATEURS HARMONIQUES.

A) Oscillateurs libres.

I) Définition:

Un oscillateur harmonique est tout système mécanique dont la position q(t), la vitesse $\frac{dq(t)}{dt}$ et l'accélération $\frac{d^2q(t)}{dt^2}$ sont des fonctions sinusoïdales du temps.

La variable q(t) obeit à la relation:

$$\frac{d^2q(t)}{dt^2} + \omega_0^2 q(t) = 0.$$

C'est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants et sans second membre. Son équation caractéristique est:

$$r^2 + \omega_0^2 = 0.$$

La solution de cette équation est de la forme:

$q(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi)$ ou $q(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$,

où A, ω_0 et φ sont, respectivement, l'amplitude, la pulsation et la phase de l'oscillation.

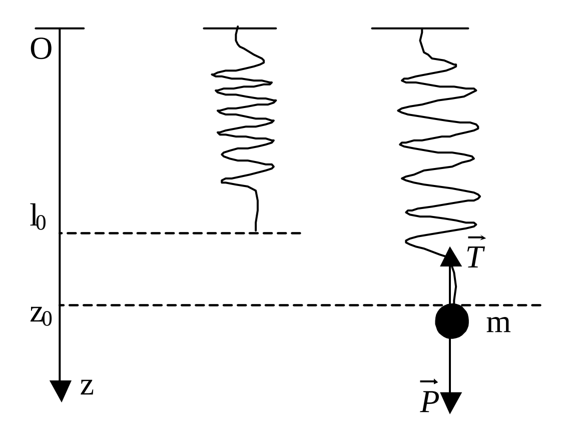
A et φ sont déterminées à partir des conditions initiales.

La période de l'oscillation est définie par: $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$, et la fréquence par: $f = \frac{1}{T}$.

II) Système masse-ressort.

a) masse au repos.

Soit un ressort de masse supposée négligeable devant la masse m qui lui est accrochée.



A l'équilibre, le principe fondamental de la dynamique appliqué à la masse m s'écrit:

$$\vec{P} + \vec{T} = \vec{0}.$$

$\vec{P}$ est le poids de la masse m.

$\vec{T}$ est la force de rappel du ressort.

La projection de l'équation vectorielle ci-dessus sur l'axe $\overrightarrow{Oz}$ donne: mg + T = 0.

$T = -K(z_0 - l_0)$ (loi de Hooke). l_0 est la longueur du ressort à vide est z_0 est la longueur de celui-ci à l'équilibre. K est la constante de raideur (ou d'élasticité) du ressort.

D'où

$mg = K(z_0 - l_0)$.

b) <u>Masse en mouvement.</u>

Dans ce cas, la masse m sera repérée par rapport à l'axe $\overrightarrow{Oz}$ par z(t). L'équation du mouvement de la masse m est:

$$mg - K(z(t) - l_0) = m\ddot{z}(t)$$, qui peut encore s'écrire:

$$mg - K(z(t) - z_0 + z_0 - l_0) = mg - K(z_0 - l_0) - K(z(t) - z_0) = m\ddot{z}(t).$$

Il reste :

$$\ddot{z} + \frac{K}{m}(z - z_0) = 0. \qquad (1)$$

Posons $Z = z - z_0$.

L'équation (1) devient:

$$\boxed{\ddot{Z} + \frac{K}{m}Z = 0.} \qquad (2)$$

Z désigne l'écart par rapport à la position d'équilibre.

c) <u>Energie mécanique.</u>

Les deux forces $\vec{P}$ et $\vec{T}$ mises eu jeu sont conservatives:

$\vec{P}$ et $\vec{T}$ sont portées par l'axe $\overrightarrow{Oz}$:

$$\overrightarrow{rot}\vec{P} = \overrightarrow{rot}\vec{T} = \vec{0}.$$

D'où $\vec{P} = -\overrightarrow{\nabla}E_{P_1}$ et $\vec{T} = -\overrightarrow{\nabla}E_{P_2}$.

Les énergies potentielles E_{P_1} et E_{P_2} dont dérivent les forces $\vec{P}$ et $\vec{T}$ sont respectivement:

$$E_{P_1} = -mgz + A_1 \quad \text{et} \quad E_{P_2} = K\left(\frac{z^2}{2} - l_0 z + A_2\right) = \frac{K}{2}(z - l_0)^2 + A_3.$$

A_1, A_2 et A_3 sont des constantes d'intégration.

L'énergie potentielle du système est:

$$E_P = E_{P_1} + E_{P_2} = -mgz + \frac{K}{2}(z - l_0)^2 + A_4. \qquad \text{Avec } A_4 = A_1 + A_3.$$

Pour déterminer la constante A_4, on prendra l'énergie potentielle E_p nulle à l'équilibre :

$E_p(z_0) = 0$ donne :

$$A_4 = mgz_0 - \frac{K}{2}(z_0 - l_0)^2.$$

D'où,

$$E_p = \frac{1}{2}K(z - z_0)^2 = \frac{1}{2}KZ^2.$$

L'énergie cinétique du système est :

$$E_c = \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}m\dot{Z}^2.$$

Le système masse-ressort est un système conservatif. Son énergie mécanique reste constante.

Donc :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\dot{Z}^2 + \frac{1}{2}KZ^2 = Cte.$$

D'où

$$\frac{dE_m}{dt} = m\dot{Z}\ddot{Z} + KZ\dot{Z} = 0\ ,$$

et

$$\ddot{Z} + \frac{K}{m}Z = 0\ ,$$

qui peut s'écrire aussi,

$$\ddot{Z} + \omega_0^2 Z = 0\ . \qquad (2)$$

La pulsation de l'oscillateur libre est:

$$\omega_0^2 = \frac{K}{m}.$$

La solution de l'équation (2) est de la forme : $Z(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi)$.

Par conséquent, l'énergie mécanique du système masse-ressort s'écrit :

$$E_m = \frac{1}{2}KA^2\ .$$

Cette énergie est proportionnelle au carré de l'amplitude des oscillations.

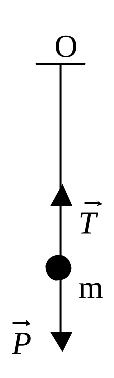
La période des oscillations est indépendante de l'amplitude A et s'écrit :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}.$$

III) Pendule simple.

On considère un fil inextensible de masse négligeable par rapport à m. La masse est accrochée à l'une des extrémités du fil, l'autre extrémité est fixée en un point O.

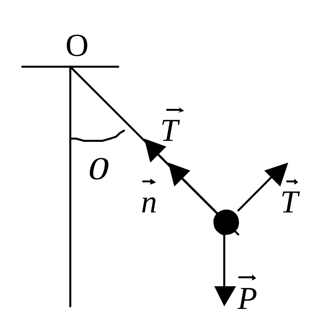
a) Pendule à l'équilibre.



A l'équilibre, la somme vectorielle du poids $\vec{P}$ de la masse m et de la tension $\vec{T}$ du fil est nulle :

$$\vec{P} + \vec{T} = \vec{0}.$$

b) Pendule hors équilibre.



Le principe fondamental de la dynamique S'écrit :

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{\gamma}.$$

La projection de cette équation vectorielle sur les axes du trièdre de Serret-Frenet donne les deux équations scalaires suivantes.

$$-mg\sin\theta = m\gamma_t = m\frac{dV}{dt} = m\frac{d^2s}{dt^2} \qquad (1)$$

$$T - mg\cos\theta = m\gamma_n = m\frac{V^2}{l} \qquad (2)$$

Où S est l'abscisse curviligne du mouvement. L est la longueur du fil = rayon de courbure de la trajectoire de la particule.
Dans le cas des faibles oscillations, sin θ voisin de θ, l'équation (1) donne :

$$\ddot\theta + \frac{g}{l}\theta = 0.$$

Cette équation différentielle a pour solution : $\theta(t) = \sin(\omega_0 t + \varphi)$.
Où

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad et \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

T_0 désigne la période des oscillations.

B) **Oscillateurs amortis par un frottement fluide.**

Dans cette partie, nous tenons compte des forces de frottement de la masse avec le fluide. Il existe deux types de frottements :

- Frottements solides où la force de frottement est une constante.
- Frottements fluides (ou visqueux) où la force de frottement est proportionnelle au vecteur vitesse de la masse m.

$$\vec{F}_f = -K'\vec{V}.$$

K' est le coefficient de frottement. K' est positif.
Le signe (-) qui apparaît dans l'expression de la force de frottement traduit le fait que cette force s'oppose au mouvement.
Dans le cas unidimensionnel, nous avons

$$\vec{V} = \dot z\,\vec{k}.$$

Le principe fondamental de la dynamique appliqué au système masse-ressort amorti par un frottement fluide est :

$$m\ddot z = -KZ - K'Z \quad \Rightarrow \quad \ddot z + \frac{K'}{m}\dot Z + \frac{K}{m}Z = 0.$$

C'est une équation différentielle du second ordre, linéaire, à coefficients constants et sans second membre.
On pose:

$$\frac{K}{m} = \omega_0^2, \qquad \text{avec} \quad \omega_0 = \text{pulsation propre de l'oscillateur,}$$

$$\text{et} \quad \frac{K'}{m} = 2\lambda\omega_0, \quad \text{où } \lambda \text{ est le coefficient d'amortissement.}$$

L'équation différentielle du mouvement du point M devient alors:

$$\ddot Z + 2\lambda\omega_0\dot Z + \omega_0^2 Z = 0,$$

dont l'équation caractéristique est:

$$r^2 + 2\lambda\omega_0 r + \omega_0^2 = 0.$$

Le discriminant de cette équation est: $\Delta' = \omega_0^2(\lambda^2 - 1)$.

Nous avons donc trois cas à distinguer:

a) $\Delta' > 0$ (ou $\lambda > 1$):

Les deux racines de l'équation caractéristique ci-dessus sont:

$$r_1 = -\lambda\omega_0 + \omega_0\sqrt{\lambda^2 - 1}\,.$$

$$r_2 = -\lambda\omega_0 - \omega_0\sqrt{\lambda^2 - 1}\,.$$

La solution de l'équation du mouvement du point M est donc,

$$Z(t) = e^{-\lambda\omega_0 t}\left(Ae^{\omega_0\sqrt{\lambda^2-1}\,t} + Be^{-\omega_0\sqrt{\lambda^2-1}\,t}\right),$$

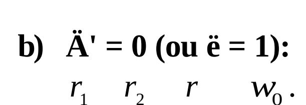
A et B sont des constantes à déterminer à partir des conditions initiales.

Quand $t \to \infty$, $Z(t) \to 0$.

Dans ce cas, il n y a pas d'oscillations autour de la position d'équilibre. Il y a retour à l'équilibre après un temps suffisamment grand.

Le régime est ***apériodique***.

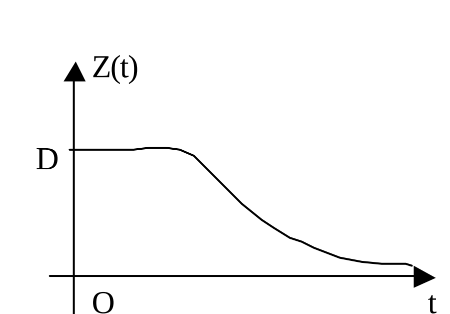
b) $\Delta' = 0$ (ou $\lambda = 1$):



$$r_1 = r_2 = r = -\omega_0\,.$$

La solution de l'équation différentielle du mouvement est:

$$Z(t) = e^{-\omega_0 t}(Ct + D)\,.$$



Dans ce cas, le retour à l'équilibre se fait

De manière plus rapide que dans le régime apériodique.

C'est le régime ***apériodique-critique.***

c) $\Delta' < 0$ (ou $0 < \lambda < 1$):

Les racines de l'équation caractéristique sont:

$$r_1 = -\lambda\omega_0 + i\omega_0\sqrt{1-\lambda^2} = -\lambda\omega_0 + i\omega.$$

$$r_2 = -\lambda\omega_0 - i\omega_0\sqrt{1-\lambda^2} = -\lambda\omega_0 - i\omega.$$

Où i est le nombre complexe ($i^2 = -1$) et $\omega = \omega_0\sqrt{1-\lambda^2}$ désigne la pseudo-période de l'oscillateur étudié.

La solution Z(t) s'écrit alors:

$$Z(t) = e^{-\lambda\omega_0 t}(C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t})\,.$$

C_1 et C_2 sont des constantes qu'on déterminera à partir des conditions initiales.

Cette solution peut encore s'écrire sous la forme,

$$Z(t) = e^{-\lambda\omega_0 t} A_1 \sin(\omega t + \varphi)\,.$$

$A_1 e^{-\lambda\omega_0 t}$ et φ sont respectivement l'amplitude et la phase de l'oscillation.

Le régime est ***pseudo-périodique***.

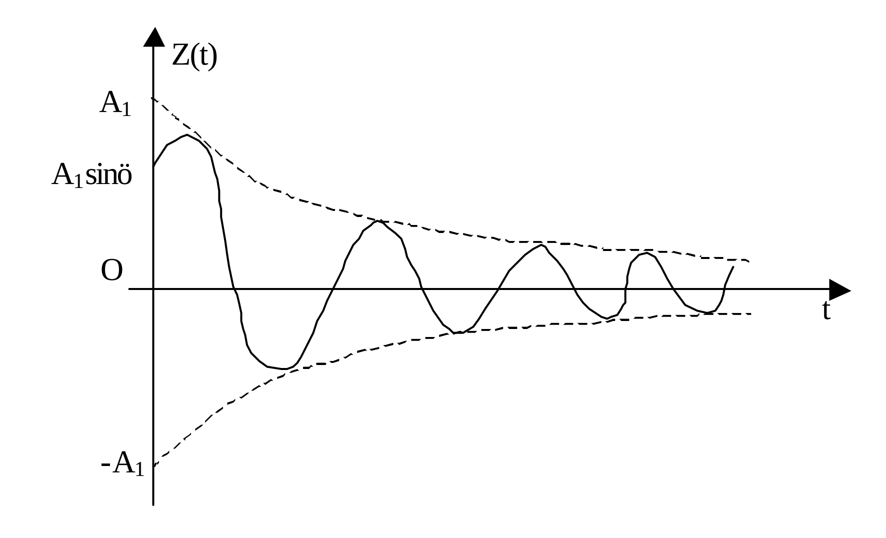
La pseudo-période des oscillations est:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0}.\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}.$$

Ou bien, $T = \dfrac{T_0}{\sqrt{1-\xi^2}}$,

avec $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$. ($T_0$ est la pulsation propre de l'oscillateur).

La pseudo-période est donc supérieure à la période propre de l'oscillateur ($T > T_0$).



Décrément logarithmique.

Nous avons:

$$Z(t) = e^{-\xi\omega_0 t} A_1 \sin(\omega t + \theta),$$

et

$$Z(t+T) = e^{-\xi\omega_0 (t+T)} A_1 \sin(\omega t + \theta).$$

On défini le décrément logarithmique δ par le rapport suivant:

$$e^{-\delta} = \frac{Z(t+T)}{Z(t)} = e^{-\xi\omega_0 t}.$$

Donc,

$$\delta = \xi\omega_0 T = \ln\left(\frac{Z(t)}{Z(t+T)}\right).$$

Le décrément logarithmique caractérise la décroissance des élongations à chaque période.

Remarque:

Le décrément logarithmique peut aussi s'écrire,

$$\delta = \xi\omega_0 T = \xi\omega_0.\frac{2\pi}{\omega_0}\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}.$$

CHAPITRE 6.

CHOCS DE DEUX PARTICULES.

I) Définition.

On appelle choc ou collision entre deux particules, toute interaction qui entraîne une variation brusque et finie des vecteurs vitesses des deux particules pendant un temps très court.

II) Conservation de la quantité de mouvement.

Soient m_1 et m_2 les masses respectives des particules M_1 et M_2 dans un référentiel galiléen R_0. et soient:

- $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ les vitesses respectives de M_1 et M_2 dans le repère R_0 avant le choc.
- $\vec{V'}_1$ et $\vec{V'}_2$ les vitesses respectives de M_1 et M_2 dans le repère R_0 après le choc.
- $\vec{F}_{21}$ et $\vec{F}_{12}$ les forces transitoires appliquées respectivement à M_1 et à M_2 uniquement pendant le choc.

Les forces de réaction $\vec{F}_{21}$ et $\vec{F}_{12}$ qui apparaissent pendant le choc sont très importantes, comparées aux forces extérieures appliquée à M_1 et M_2.

Hypothèse fondamentale:

On admettra que les forces $\vec{F}_{21}$ et $\vec{F}_{12}$ vérifient le principe d'action et de la réaction: $\vec{F}_{21} \quad \vec{F}_{21} \quad \vec{0}$.

D'où $\vec{F}_{21} \quad \vec{F}_{21} \quad \frac{d\vec{P}_1}{dt} \quad \frac{d\vec{P}_2}{dt} \quad \frac{d(\vec{P}_1 \quad \vec{P}_2)}{dt} \quad \vec{0}$.

Donc

$$\vec{P}_1 \quad \vec{P}_2 \quad \vec{P'}_1 \quad \vec{P'}_2 \quad \overrightarrow{Cte}\ , \quad (1)$$

avec

$$\vec{P}_1 \quad m_1\vec{V}_1,\ \vec{P}_2 \quad m_2\vec{V}_2\ ,\ \vec{P'}_1 \quad m_1\vec{V'}_1 \text{ et } \vec{P'}_2 \quad m_2\vec{V'}_2.$$

L'équation (1) montre que la quantité de mouvement du système (S), formé de M_1 et de M_2, se conserve (quantité de mouvement du système est la même avant et après le choc).

<u>Remarque:</u>

Au moment de la collision entre les particules M_1 et M_2 , les forces extérieures au système (S) sont généralement négligeables devant les forces intérieures à ce système que sont les forces de contact. (S) peut alors être considéré comme système isolé.

Dans le cas d'un système isolé, le principe fondamental de la dynamique appliqué à celui-ci dans le repère R_0 est comme suit:

$$\vec{F}_{ext} \quad m\vec{y}(S) \quad (m_1 \quad m_2)\vec{y}(S) \quad \frac{d\vec{P}}{dt} \quad \vec{0}.$$

Donc,

$$\vec{P} \quad \vec{P}_1 \quad \vec{P}_2 \quad \vec{P'}_1 \quad \vec{P'}_2 \quad \overrightarrow{Cte}.$$

I) Collisions élastiques et inélastiques:

a) Collisions élastiques:

Par définition, la collision entre deux particules M_1 et de M_2 est dite parfaitement élastique si l'énergie cinétique du système(S) des deux particules avant le chocs est égale à l'énergie cinétique totale de ce système après le choc.

Nous avons alors:

$$\frac{1}{2}m_1V_1^2 \quad \frac{1}{2}m_2V_2^2 \quad \frac{1}{2}m_1V'^2_1 \quad \frac{1}{2}m_2V'^2_2 .$$

b) Collision inélastique:

Dans ce cas, il n'y a pas de conservation de l'énergie cinétique du système durant la collision.

Le bilan énergétique s'écrit:

$$\frac{1}{2}m_1V_1^2 \quad \frac{1}{2}m_2V_2^2 \quad \frac{1}{2}m_1V'^2_1 \quad \frac{1}{2}m_2V'^2_2 \quad U ,$$

où

U est la variation de l'énergie cinétique du système(S) avant et après le choc.

Si U < 0, le système absorbe de l'énergie (le choc est endoénergétique).

Si U > 0, le système cède de l'énergie (le choc est exoénergétique).

c) Choc mou.

- Avant le choc, la particule M_1 a la masse m_1 et la vitesse $\vec{V}_1$ et la particule M_2 a la masse m_2 et la vitesse $\vec{V}_2$.
- Après le choc, les deux masses M_1 et M_2 constituent un seul corps de masse $(m_1 + m_2)$ et de vitesse $\vec{V}$.

La conservation de la quantité de mouvement s'écrit dans ce cas,

$$m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 = (m_1 + m_2)\,\vec{V} .$$

Au cours de la collision l'énergie cinétique n'est pas conservée. Les pertes apparaissent sous forme de chaleur, de déformation, …

d) Coefficient de restitution.

Le coefficient de restitution (ou d'élasticité) e est le nombre, compris entre 0 et 1, défini par le rapport des vitesses relatives de la particule M_2 par rapport à la particule M_1 (ou de M_1 par rapport à M_2) après le choc, soit:

$$e \quad \left| \frac{\vec{V}'_1 \quad \vec{V}'_2}{\vec{V}_1 \quad \vec{V}_2} \right|$$

- Si e = 0, le choc est mou.
- Si e = 1, le choc est élastique.
- Si 0 < e < 1, le choc est inélastique (ou intermédiaire).

II) Exemples de choc élastiques.

On considère un système (S) de deux particules M_1 et M_2 de masses respectives m_1 et m_2, dont les vitesses $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ avant le choc deviennent $\vec{V}'_1$ et $\vec{V}'_2$ après le choc.

La conservation de la quantité de mouvement (équation vectorielle) et la conservation de l'énergie cinétique du système (S) donnent quatre équations scalaires pour les six composantes des vitesses inconnues. Les six inconnues sont en général les six composantes des vitesses $\vec{V}'_1$ et $\vec{V}'_2$. Il faut alors fournir d'autres indications supplémentaires pour avoir autant d'inconnues que d'équations scalaires.

1) Collision élastique directe de deux particules.

Un choc entre deux particules M_1 et M_2 est appelé "direct", "frontal" ou de "plein fouet" si les vitesses avant et après le choc, $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$, $\vec{V}'_1$ et $\vec{V}'_2$ sont colinéaires.

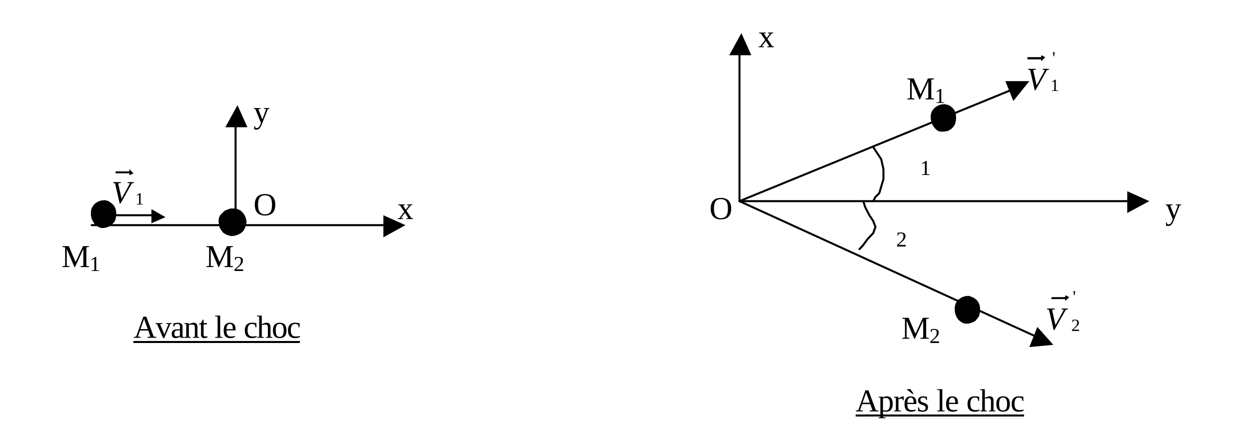
Dans ce cas, nous aurons deux équations à deux inconnues:

$$m_1\vec{V}_1 \quad m_2\vec{V}_2 \quad m_1\vec{V}'_1 \quad m_2\vec{V}'_2$$

$$\frac{1}{2}m_1V_1^2 \quad \frac{1}{2}m_2V_2^2 \quad \frac{1}{2}m_1V'^2_1 \quad \frac{1}{2}m_2V'^2_2$$

2) Collision de type boules de billard.

Supposons que la particule M_1 est animée d'une vitesse $\vec{V}_1$ juste avant le choc, dans le repère galiléen R_0, et que la particule M_2 soit immobile. On dit que les particules M_1 et M_2 subissent un choc élastique de type boules de billard, si après le choc, leurs vitesses respectives font des angles è$_1$ et è$_2$ avec la direction de $\vec{V}_1$.



- Conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique du système (S) avant et après le choc:

$$m_1\vec{V}_1 \quad m_1\vec{V}'_1 \quad m_2\vec{V}'_2$$

$$m_1V_1^2 \quad m_1V'^2_1 \quad mV'^2_2$$

La projection de l'équation vectorielle ci-dessus sur les trois axes de R_0 donne:

$$m_1V_1 \quad m_1V'_1\cos O_1 \quad m_2V'_2\cos O_2$$

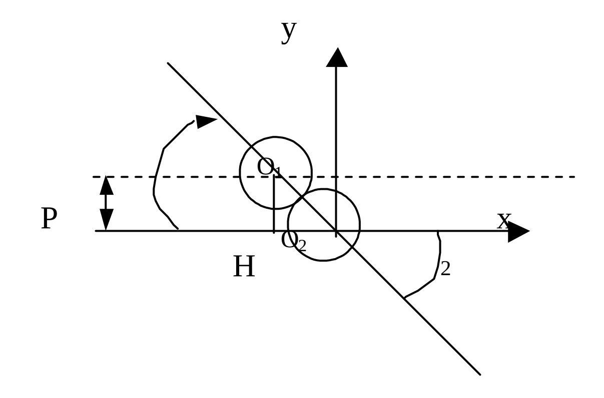
$$0 \quad m_1V'_1\sin O_1 \quad m_2V'_2\sin O_2$$

$$m_1V_1^2 \quad m_1V'^2_1 \quad m_2V'^2_2$$

Nous avons donc trois équations pour quatre inconnues (V'_1, V'_2, O_1 et O_2).
Pour avoir le nombre d'équations nécessaires à la recherche des inconnues, nous introduisons le paramètre d'impact P.
Le paramètre P est la distance qui sépare, au moment du choc, le centre de la particule M_1 de l'axe $\overrightarrow{Ox_0}$.
Le paramètre d'impact P est donnée par:

$$P \quad O_1H \quad 2r \sin ci \quad 2r \sin O| \, .$$

r est le rayon de M_1 et M_2 identiques.
La donnée de P permet de résoudre le problème du nombre d'inconnues.



TD

S.V. et S.T.U.

MECANIQUE - T.D.1

1/ Une moto parcourt 30 kilomètres de ligne droite en 50 minutes. Que vaut la vitesse moyenne exprimée en m/s?

2/ Un athlète parcourt 100 m en 8 s et 13 centièmes. Que vaut sa vitesse moyenne exprimée en Km/h?

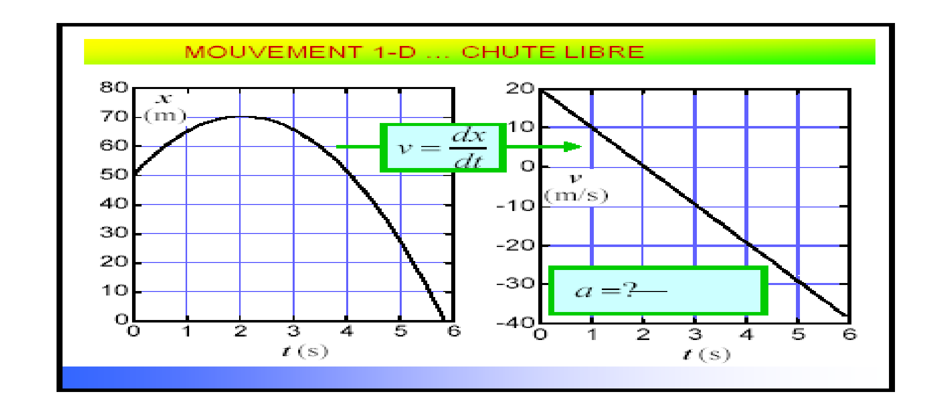
3/ Un escargot parcourt 1 mm en 10 s. que vaut sa vitesse moyenne en Km/h ?

4/ X et Y quittent leurs maisons au même moment et roulent en sens opposé. X a une vitesse de 30 Km/h alors que Y a une vitesse deux fois plus grande.
Quelle est la distance entre leurs maisons sachant qu'ils se croisent après 10 min ?

5/ Une voiture est sur le point d'en dépasser une autre. Sa vitesse augmente de 50 à 100 Km/h en 4 s. Que vaut l'accélération moyenne en m/s^2?

6/ Une voiture, qui a une vitesse initiale de 20 m/s freine avec une décélération de 3 m/s^2. Quel temps lui faudra-t-elle pour s'arrêter?

7/ A partir des figures ci-dessous, déterminer l'équation horaire du mouvement x(t).



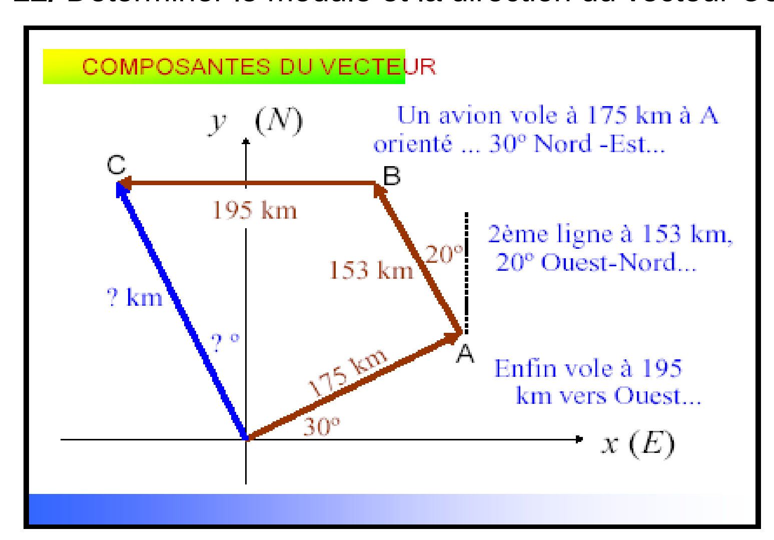
8/ Quelle doit être la hauteur d'une chute d'eau d'un barrage pour que l'eau atteigne la roue d'une turbine avec une vitesse verticale de 40 m/s?

9/ Pourquoi les voitures de course de formule 1 sont pilotées manuellement ?

10/ Lorsqu'un automobiliste repère un obstacle, un certains temps de réaction τ s'écoule avant qu'il commence à freiner avec une décélération a que l'on suppose constante.
Quels sont le temps de réaction et la décélération que l'on déduit de la loi empirique :
Distance de freinage $d_f = \frac{1}{3}V_0 + \frac{1}{50}V_0^2$ où V_0 est la vitesse de la voiture juste avant le freinage (d_f en m et V_0 en km/h)

11/ Si a, b et c sont les longueurs des côtés d'un triangle quelconque et β l'angle compris entre les côtés a et b, montrer que le théorème de Pythagore généralisé est donné par : $a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta = c^2$

12/ Déterminer le module et la direction du vecteur $\vec{OC}$?



13/ On appelle cycloïde la courbe décrite par un point invariablement lié au cercle mobile (appelé cercle générateur) qui roule sans glisser sur une droite (appelée directrice).
Les équations horaires du mouvement cycloïde sont données par :

$$x(t) = a\,(t - \sin t)$$
$$y(t) = a\,(1 - \cos t)$$

Exprimer la vitesse et l'accélération d'un objet décrivant une cycloïde?

14/ Les écrans des tubes cathodiques (des téléviseurs, des ordinateurs, des oscilloscopes….) émettent de la lumière lorsqu'ils sont atteints par des électrons ayant une grande vitesse. On utilise des plaques chargées électriquement pour contrôler leur point d'impact.
Des électrons ayant une vitesse initiale horizontale de $2\ 10^7\ ms^{-1}$ sont soumis à une accélération verticale de $10^{14}\ ms^{-2}$ pendant leur trajet entre des plaques qui ont une longueur de 0.2 m.

a- Pendant combien de temps les électrons restent-ils entre les plaques ?
b- Quelle sera la direction des électrons à la sortie de celles-ci ?
c- Que vaudra la déviation verticale à la sortie des plaques ?

15/ Une particule 1 bouge le long de l'axe OX avec la vitesse $\vec{V}_1 = 2\,\vec{i}$ et une autre 2 le long de l'axe OY à la vitesse $\vec{V}_2 = 3\,\vec{j}$. Les deux vitesses sont en cm/s. A l'instant t=0, leurs coordonnées sont respectivement $\vec{r}_1(0) = (-3cm, 0)$ et $\vec{r}_2(0) = (0, -3cm)$

a- Déterminer le vecteur $\vec{r}_{12}(t) = \vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t)$ représentant la position relative des deux particules.
b- Où et quand les 2 particules se trouveront-elles à une distance minimale l'une de l'autre ?

MECANIQUE - T.D.2

1/ Le noyau d'un atome d'Uranium peut être approximativement décrit par une sphère dont le rayon vaut 8,7 10^{-15} m et dont la masse vaut 3.5 10^{-25} Kg
Quelle est sa masse volumique ainsi que sa densité ?

2/ Un ascenseur a une masse de 1000 kg.

a- Il a une accélération en montée de 3 m/s^2. Que vaut la tension T exercée par le câble ?

b- Que vaut la tension T si l'accélération est de 3 m/s^2 en descente ?

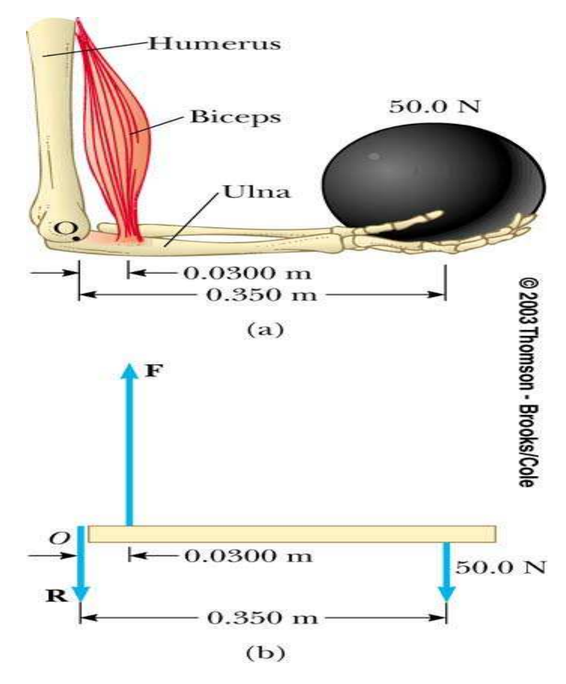
3/ Un avion de chasse pique, à la verticale avec une accélération de 3g.
Quelles sont la grandeur et la direction du poids effectif du pilote si son poids est P ?

4/ Un parachutiste dont le poids est P, touche le sol les jambes fléchies. Il s'immobilise en subissant une décélération de 3g.
Trouver la force exercée par le sol sur le pilote au cours de l'atterrissage ? Discuter

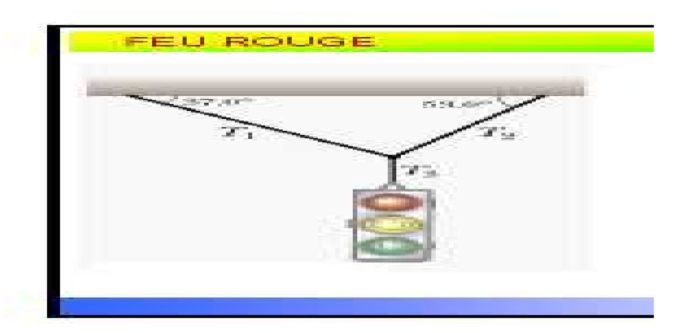
5/ Un bloc de 5 kg se trouve sur une surface plane horizontale. Si une force horizontale T=20 N est appliquée au bloc et si celui-ci reste immobile, que vaut la force de frottement ?
Le bloc se met en mouvement lorsque T atteint une valeur de 40 N. Que vaut μ_s ?
Le bloc continu de se déplacer à vitesse constante si T est ramenée à 32 N. Que vaut μ_c?

6/ La lune se trouve à 3.9 10^5 Km du centre de la terre. Sa masse est de 7.3 10^{22} Kg et la masse de la terre vaut 6.0 10^{24} Kg. A quelle distance du centre de la terre doit se trouver un objet pour que les forces gravitationnelles dues à la terre et à la lune soient égales mais opposées.

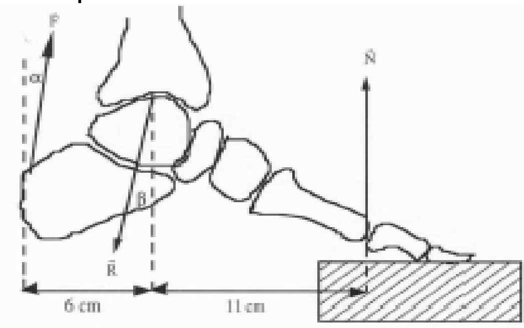
7/ La figure ci-dessous représente un avant-bras, sous la forme d'un modèle constitué d'une barre articulée autour d'un pivot et soutenue par un câble. Trouver la tension F exercée par le biceps et la force R exercée par l'articulation du coude.



8/ Déterminer T_1, T_2 et T_3 sachant que le poids du feu rouge est de 125 N.
Les angles entre l'horizontal et les tensions T_1 et T_2 sont respectivement 37° et 53°.



9/ Lorsqu'on est debout sur la pointe d'un seul pieds, la configuration des forces agissant sue le pieds est schématisée sur la figure ci-dessous.
La force F est exercée par le tendon d'Achille, R est la réaction du tibia et N est la réaction du sol.
Déterminer les équations d'équilibre ?



10/ Une feuille d'or a une épaisseur de 10 mm. Que vaut la masse d'une surface de 10 cm de côté sachant que la densité de l'or vaut 19.3 ?

11/ Imaginons que les globules rouges soient de petites sphères de rayon R =2 μm et de masse volumique ρ = 1300 Kg/m^3.
Quelle est la masse d'un globule rouge ?

12/ Un fémur humain se fracture si la force de compression vaut 210^5 N. Une personne, dont la masse est de 60 kg, la reçoit sur une jambe.

a- Quelle accélération produira une fracture ?
b- Que vaut cette accélération par rapport à l'accélération de la pesanteur ?

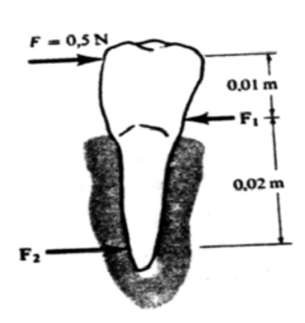
13/ Un bloc de masse m_1 = 20 kg est libre de se mouvoir le long d'une surface horizontale. Une corde qui passe dans la gorge d'une poulie le relie à un second bloc de masse m_2 = 10 kg. Ce bloc est en suspension verticale. Supposons, pour simplifier, que la poulie et la corde ont des masses négligeables. Dans l'hypothèse où il n'y a pas de frottements, déterminer :

a- les forces qui s'exercent sur les blocs ;
b- leurs accélérations.
c- Si le système est au repos à l'instant initial, quelle distance aura-t-il parcourue après 2 s ?

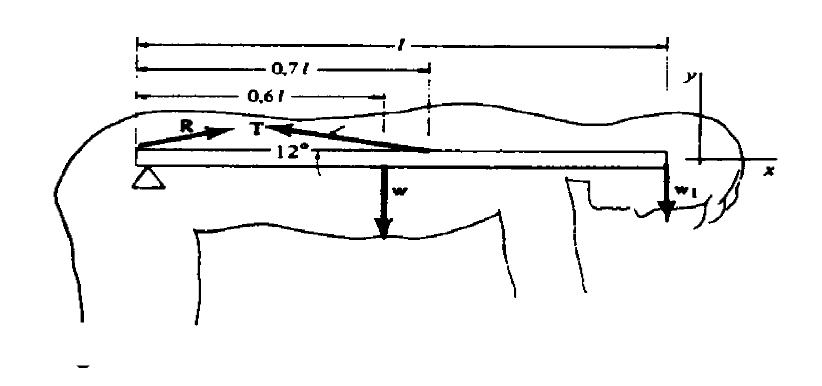
14/ Un bloc est au repos sur un plan incliné. Le coefficient de frottement statique vaut μ_s. Quel est l'angle d'inclinaison maximum θ_{max} du plan incliné pour lequel le bloc reste au repos ?

15/ Une boîte, pesant 100 N, est au repos sur un sol horizontal. Le coefficient de frottement statique vaut 0.3. Quelle est la force minimum nécessaire pour mettre la boîte en mouvement ?

16/ Trouver les forces F_1 et F_2 qui s'exercent sur la dent représentée par la figure ci- dessous. (En orthodontie, les forces appliquées aux dents donnent naissance à des forces sur les os de la mâchoire. Progressivement, le tissu osseux se modifie, ce qui permet à la dent de pivoter ou de se déplacer. De nouveaux tissus osseux se régénèrent dans l'espace crée. Les forces doivent être suffisamment faibles pour éviter d'endommager la racine de la dent.)



17/ La colonne vertébrale humaine comprend 24 vertèbres séparées par des disques qui contiennent un liquide (LCR). Lorsqu'on se penche pour ramasser un objet, une force très importante apparaît sur le disque lombo-sacré qui sépare la dernière vertèbre de l'os qui supporte la colonne vertébrale (le sacrum).
Si on assimile la colonne vertébrale à une barre qui tourne autour d'un pivot comme le montre la figure ci-dessous, on peut dire que :
Le sacrum exerce une force R sur la colonne vertébrale. Les différents muscles du dos sont équivalents à un seul muscle produisant une tension T.
A l'aide des données de la figure, évaluer T et R. W=430 N étant le poids du torse et des bras.
Discuter les cas W_1=0 et W_1=175 N



MECANIQUE - T.D.3

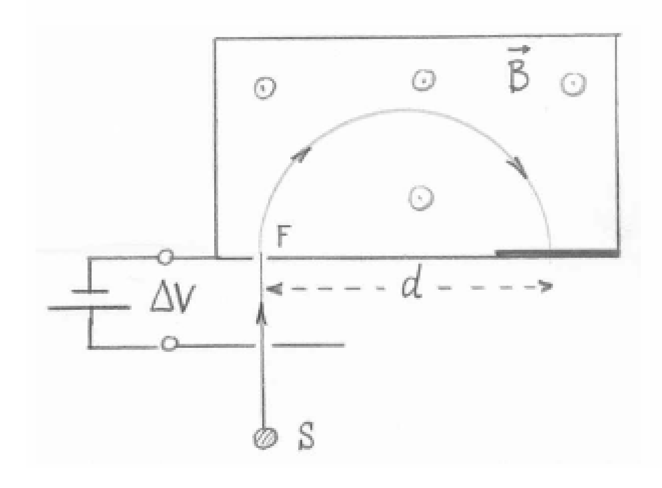
1/ La vitesse maximale des lames d'une tondeuse à gazon ne peut pas dépasser une valeur limite. Cette limite a pour but de réduire les dangers dus aux projections de pierres et autres débris. Un modèle de tondeuse disponible sur le marché a une

vitesse de rotation de 3700 tours par minute. La lame a un rayon de 0.25 m.
a-Quelle est la vitesse linéaire de l'extrémité de la lame ?
b- Si la lame s'arrête en trois secondes avec une décélération constante, évaluer le nombre de tours qu'elle effectue au cours de cette décélération.

2/ Dans un modèle simple de l'atome d'hydrogène, on considère que l'électron se déplace autour du proton sur une orbite circulaire de rayon 5.29×10^{-11} m. La masse du proton vaut M = 1.67×10^{-27} kg et celle de l'électron m = 9.11×10^{-31} kg.
a- Que valent les forces électriques et gravitationnelle exercées par le proton sur l'électron ? Conclure.
b- Déterminer l'accélération et la vitesse de l'électron dans l'atome d'hydrogène ainsi que le nombre de révolutions effectuées par seconde.

3/ Imaginons que les globules rouges soient de petites sphères de rayon R =2 μm et de masse volumique ρ = 1300 g/l .
Comparer leur poids à la force centrifuge que produit une centrifugeuse de vitesse de rotation égale à 10^4 tours/min et de rayon 10 cm ? Conclure

4/ La figure ci-dessous montre schématiquement un spectromètre de masse. La source S produit des ions positifs de charge +2e (+ e est la charge du proton = $1.602\ 10^{-19}$ C) et de masse inconnue M. Les ions sont accélérés par une tension électrique pour atteindre une vitesse V=$3.1\ 10^5$ m/s. Après le passage de la fente F, ils sont soumis à un champ magnétique $\vec{B}$ de 0.1 T. ($\vec{B}$ est perpendiculaire au plan de la figure). Dans $\vec{B}$ ils décrivent une trajectoire semi-circulaire et sont enregistrés sur un écran à une distance d = 13 cm de A.
Quelle est la masse M des ions ?
De quel ion s'agit-il ? On rappelle que la masse d'un proton est égale à M_p= $1.67\ 10^{-27}$ Kg



5/ Soit un satellite de masse m en orbite autour de la terre (de masse M_T)
r étant le rayon de l'orbite circulaire.
a/ A partir de la 2ème loi de Newton, déterminer l'accélération du satellite.
b/ Déterminer la vitesse du satellite.
c/ Montrer qu'on a : $T^2 = C\, r^3$ appelée 3ème loi de Kepler
C est une constante qu'on déterminera.
d/ Quelle doit-être l'altitude h, par rapport à la surface terrestre, pour que le satellite ait une période de 24 h. Commenter
Données numériques: $M_T = 6\ 10^{24}$ Kg, R = 6400 km, m = 1000 Kg,
$G = 6{,}7\ 10^{-11}$ S.I.,

6/ Déterminer la vitesse V et la vitesse angulaire ω qu'un avion qui vole à l'équateur à une hauteur de 5000 m doit avoir pour voir le soleil fixe à l'horizon. L'avion doit voler vers l'est où vers l'ouest?

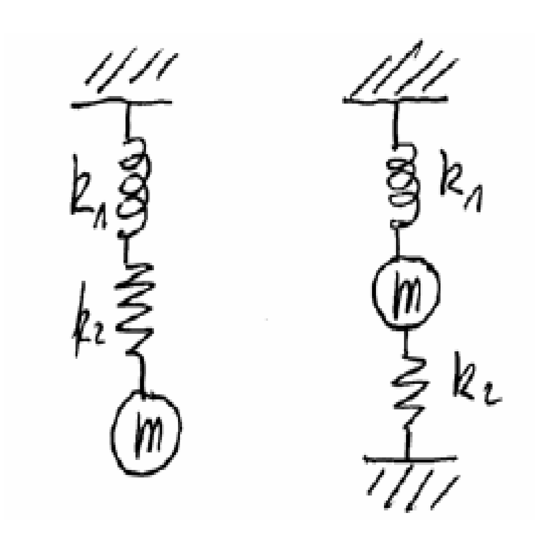
7/ Vous faites tourner (avec une vitesse uniforme) une pierre attachée à l'extrémité d'une corde de longueur R égale à 1.2 m dans un plan horizontal situé à une hauteur h égale à 1.8 m du sol. La corde casse et la pierre touche le sol à une distance L égale à 9.1 m de vos pieds.
Quelle est la valeur de l'accélération centripète a_c pendant le mouvement circulaire de la pierre?

8/ Déterminer l'équation du mouvement d'une masse m accrochée à un ressort horizontal.
A t = 0 , on écarte la masse de sa position d'équilibre et on la lâche sans vitesse initiale.

9/ Résoudre l'équation différentielle du mouvement oscillatoire amorti.
Discuter le résultat obtenu selon l'importance du coefficient d'amortissement.

10/ Une particule pénètre avec une vitesse V_0 dans un milieu visqueux caractérisé par un coefficient de frottement β. Si m est la masse de la particule, que vaut la distance de pénétration L dans ce milieu.
A.N.: V_0= 10 m/s, m= 1 g et β= 200 g/s

11/ Déterminer en négligeant le frottement :
a- L'élongation à l'équilibre
b- La fréquence propre d'oscillation des deux oscillateurs ci-contre.



12/ Imaginer un tunnel traversant complètement la terre le long d'un diamètre. A une extrémité du tunnel, on lâche une masse m avec une vitesse nulle.
a- Ecrire l'équation du mouvement de m et montrer que son mouvement est une oscillation harmonique.
b- Que vaut la période T du mouvement ?

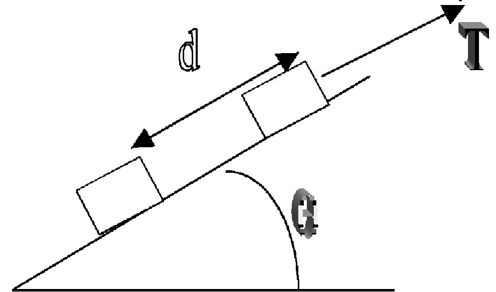
13/ Une molécule diatomique peut être envisagée comme un système de deux masses m_1 et m_2 interagissant par l'intermédiaire d'un ressort de constante élastique K.
a- Montrer que la fréquence propre d'oscillation de la molécule est donnée par :

$\upsilon_0 = \frac{1}{\;}\sqrt{\frac{k}{\;}}$ $\quad \frac{m_1 m_2}{\;}$

2π

MECANIQUE - T.D.4

1/ Un objet de masse m est en mouvement ascendant sur une pente. Le frottement est supposé négligeable et la tension **T** qui tire l'objet est représentée sur la figure ci-dessous.
Qu'est ce qu'on peut conclure au sujet du travail de la force gravitationnelle exercée par la terre sur l'objet.
Déterminer le travail total de m durant le déplacement d.



2/ Une personne qui veut maigrir soulève 10^3 fois une masse de 10 kg d'un hauteur de 50 cm.
a- Quel travail effectue-t- elle pour vaincre la force de pesanteur ?
(Lorsqu'elle abaisse la masse, on supposera que l'énergie potentielle est dissipée)
b- la graisse fournit une énergie de $3.8\ 10^6$ J par kg. Cette énergie est convertie en énergie mécanique avec un rendement de 20 %. Quelle quantité de graisse sera brûlée au cours de l'exercice ?

3/ Déterminer l'énergie potentielle d'un oscillateur harmonique unidimensionnel.
Sachant que la solution de l'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique est donnée par : $x(t) = A \sin(\omega t+\varphi)$,
En déduire l'expression de l'énergie mécanique.

4/ Soit un électron en mouvement circulaire autour d'un proton.
a- Donner l'expression de l'énergie cinétique.
b- Déterminer l'expression de l'énergie potentielle.
c- En déduire l'expression de l'énergie mécanique.

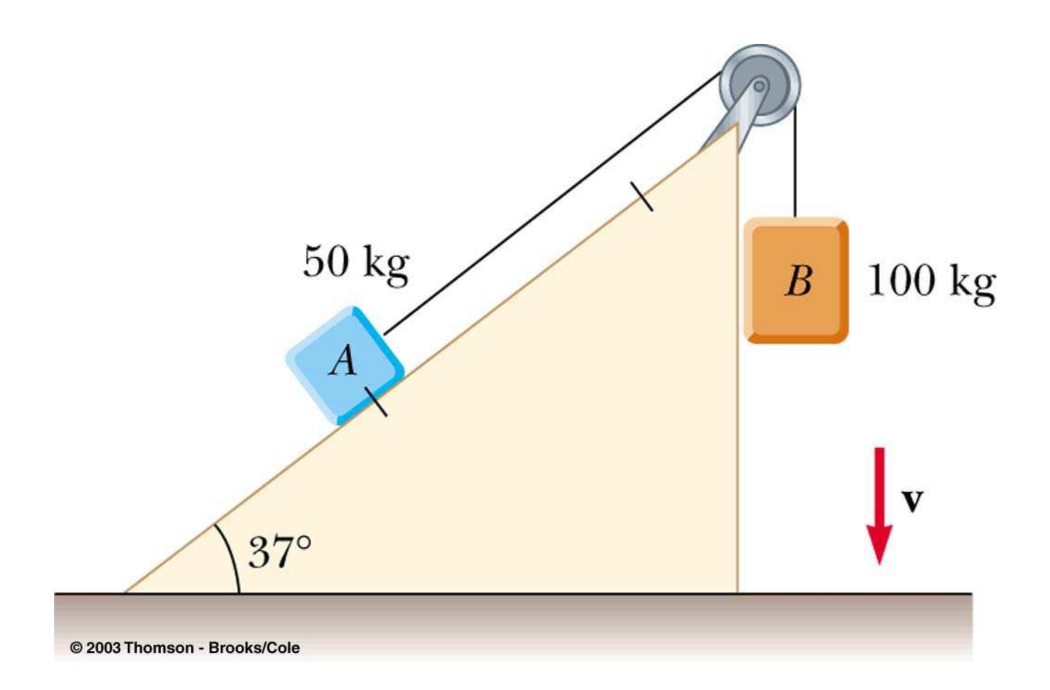
5/ Les pales d'une éolienne balaient une surface circulaire S.
a- Si le vent a une vitesse V et une direction perpendiculaire à la surface balayée par les pales, quelle est la masse d'air qui passe à travers l'éolienne au cours du temps ?
b- Quelle est l'énergie cinétique de l'air ?
c- Supposons que l'éolienne transforme 30 % de l'énergie éolienne en énergie électrique.
Calculer la puissance électrique produite ?
On donne : la masse volumique de l'air $\rho = 1.2$ kg/m^3, S = 30 m^2 et V = 36 Km/h.

6/ Une skieuse, de masse 50 Kg, descend le long d'une colline sans vitesse initiale. La hauteur de la colline est de 20 m.
a- Quelle sera sa vitesse en bas de la colline si on néglige les forces de frottements ?
b- Cette fois les forces de frottements ne sont pas négligeables et la vitesse en bas de la pente est de 10 m/s. Quel a été le travail des forces de frottements ?
c- Après la colline, elle aborde un terrain plat. Elle fait pivoter ses skis et s'immobilise rapidement. Si le coefficient de frottement cinétique μ_c est de 2.5, déterminer la distance au bout de laquelle elle s'arrêtera ?

7/ Dans une salle de sport, une personne soulève un poids pour brûler la graisse. La graisse fournit une énergie de $3.8\ 10^7$ J/kg et cette énergie est convertie en énergie mécanique avec un rendement de 20 %.
Sachant que la personne a mangé un tajine avec 35 g de graisse, combien de fois elle doit soulever une masse de 10 kg d'une hauteur de 50 cm pour éliminer toute la graisse consommée ?

8/ Les objets en rotation possèdent aussi une énergie cinétique.
Déterminer le travail et la puissance d'une roue, de rayon r, en rotation autour de son axe Δ.
Application : Un seau de 20Kg est maintenu au-dessus d'un puits par une corde de masse supposée négligeable et enroulée autour d'un cylindre de 0,2 m de rayon. Son moment d'inertie vaut 0.2 Kg m^2.
Si le sceau part du repos, quelle vitesse aura t-il au moment d'atteindre l'eau 10 m plus bas.

9/ Deux blocs A et B (m_A= 50 Kg et m_B= 100 Kg) sont relies comme le montre la figure ci-dessous. Si les 2 blocs sont initialement au repos, quelles sont leurs vitesses quand A aura parcouru une distance de 25 cm ?
Tous les frottements sont supposés nuls.



10/ Un bloc A de masse m= 0.5 Kg est au repos. Il est comprimé de 2 cm par rapport à l'équilibre puis lâché.

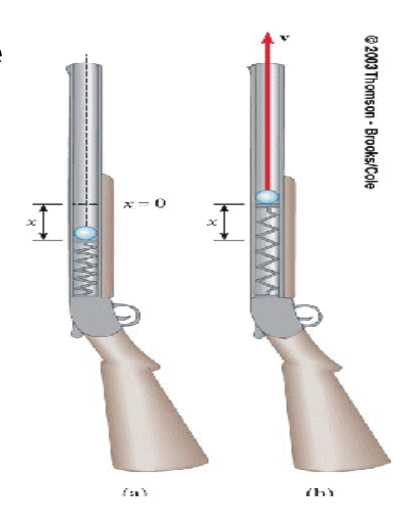
a- Calculer sa vitesse au point B

b- Calculer la distance d maximale parcourue sur le plan incliné dans le cas où θ= 25°.

11/ Un fusil tire une balle en liège de masse 20 g sur une hauteur de 40 m et son ressort est comprimé de 1.5 cm.

a- Quelle est la raideur du ressort?

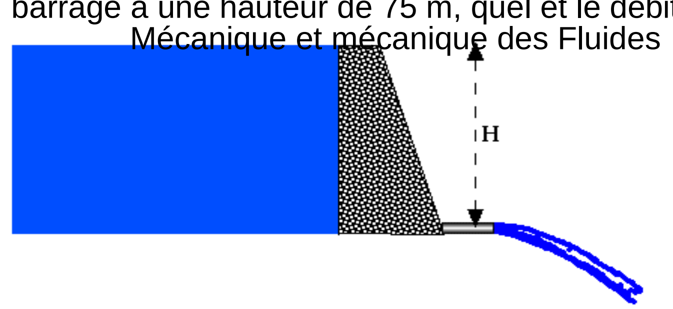
b- Quelle est l'accélération maximale de la balle?



12/ Un ascenseur a une masse de 550 kg et un contrepoids de 700 kg soulève 23 étudiants de 80-kg chacun de 30 mètres pendant 12 s.

Quelle est la puissance requise? (en W et hp)

13/ A partir d'un barrage, on veut produire une puissance de 50 MW. Sachant que le barrage a une hauteur de 75 m, quel et le débit d'eau (en m^3/s) nécessaire ?



μ Où $\mu = m_1$

$+ m_2$

est la masse réduite de la molécule.

MECANIQUE - T.D.6

I- le débit de l'eau dans un tuyau d'un rayon de 2 cm vaut 0.01 m^3/s à 20 ℃.
a- Quelle est la vitesse moyenne de l'eau?
b- Quelle est la nature de l'écoulement? η (eau à 20℃) = 0.6947 10^{-3} Pa.s

II- Considérons l'écoulement du sang à 37 ℃ dans une a rtère de 2 mm de rayon.
Jusqu'à quelle vitesse moyenne du sang l'écoulement reste-t-il laminaire?
Quel est le débit Q correspondant? η(37 ℃)= 2.084 10^{-3} Pa.s.

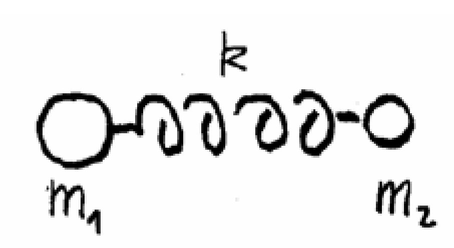
III- Le rayon intérieur d'une grosse artère d'un chien est de 4 mm.
Le débit du sang à travers l'artère est de 1 cm^3/s.
a- Calculer les vitesses moyenne et maximale du sang?
b- Calculer la chute de pression le long de l'artère sur une longueur de 10 cm.
La viscosité du sang η à 37 ℃ est égale à 2.084 10^{-3} Pa.s.
c- Quelle est la puissance requise pour entraîner l'écoulement sanguin dans l'artère?
Commenter le résultat obtenu sachant que le métabolisme d'un chien est supérieur ou égal à 10 W.

IV/ Une boule de Bowling en acier et de rayon 10 cm tombe d'un air bus.
a- Quelle est sa vitesse limite?
b- Quand elle dépassera la vitesse du son?
On donne: ρ_{acier}=7.85 10^3 Kg/m^3, ρ_{air}=1.20 Kg/m^3 ,η_{air}= 1.73 10^{-5} Pa.s

V- L'artère pulmonaire, qui connecte le cœur aux poumons a une longueur de 85 mm et présente une chute de pression sur cette longueur de 450 Pa. Si le rayon interne de cette artère vaut 2.4 mm,
Calculer la vitesse moyenne du sang dans cette artère?

VI- Le rayon de l'artère aorte d'un adulte moyen est de 13 mm.
Sachant que le débit sanguin est de 100 cm^3/s,
Calculer la résistance à l'écoulement et la perte de charge sur une distance de 20 cm.
On supposera l'écoulement laminaire.

VII- Pour une personne au repos, les conditions physiologiques dans l'artère pulmonaire sont à peu près : Le rayon intérieur de l'artère est de 2,4 mm. La vitesse moyenne v du sang est de 1,4 m/s. La viscosité du sang η à 37 ℃ est égale à 2,084 10^{-3} Pa.s et la masse volumique du sang est de 1060 kg/m^3.-
1- Calculer Le débit du sang à travers cette artère.
2- Calculer le nombre de Reynolds ? En déduire la nature de l'écoulement
3- Calculer la perte de charge le long de l'artère sur une longueur de 85 mm ?



14/ La fréquence propre d'oscillation de deux oscillateurs harmoniques identiques de
masse m= 0.2 Kg vaut υ_0 = 2 Hz. En couplant les deux oscillateurs avec un ressort de constante k' on observe un battement de période T_B= 10 s.
a- Que vaut k' ?
b- Si on réduit la masse m d'un facteur 2, comment faut-il choisir k' pour que T_B ne change pas ?

Correction des TD

Corrigé de la série n°1
Cinématique
Mouvements unidimensionnel et bidimensionnel

1/ $V_{moy} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ **A.N. :** $V_{moy} =$ 10 m/s

2/ $V_{moy} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ **A.N. :** $V_{moy} =$ 44.3 Km/h

3/ $V_{moy} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ **A.N. :** $V_{moy} =$ 0.36 Km/h

4/ Soit l'origine du repère confondu avec la maison de monsieur X par exemple.
A l'instant t = 10 min, X et Y se rencontrent et leurs abscisses seront identiques.
L'équation du mouvement de X est : $x_1(t)= V_1 t$
L'équation du mouvement de Y est : $x_2(t)= -V_2 t + x_0$
$x_1(t=10 \text{ min})= x_2(t=10 \text{ min})$ $\Leftrightarrow$ $x_0= (V_1+ V_2)t$
A.N. : x_0= 15 Km

5/ $a_{moy} = \frac{\Delta V}{\Delta t}$ **A.N. :**

$a_{moy} = 3.47 m/s^2$

6/ L'équation du mouvement est V= a t +V_0 = -3 t + 20

V= 0 $\Leftrightarrow$ t= $\frac{20}{3}$ s

7/ La pente de la courbe V(t) est a= -10 m/s^2 : le mouvement est rectiligne uniformément retardé.
Les conditions initiales sont : V_0 = 20 m/s et x_0 = 50 m
D'où : x(t)= -5 t^2 + 20 t + 50

8/ On utilisera la formule $V^2 - V_0^2 = 2a\,\Delta x = 2a\,h$

On a: V_0=0, a= 9.8 m/s^2 et V= 40 m/s D'où h= 81.63 m

9/ Les voitures de formule 1 sont pilotés manuellement car le temps d'actionner le freinage est plus court comparativement à celui réalisé avec les pieds. En effet, la distance parcourue par l'influx nerveux, à partir du cerveau, jusqu'aux mains est plus faible par rapport à la distance aux pieds.

10/ On a d_f= $1.2V_0 + 0.26V_0^2$ (1) où d_f en m et V_0 en m/s.

La distance de freinage est donnée par : d_f= $V_0\tau + V_0 t - \frac{1}{2} a t^2$ (2)

Où τ et a sont le temps de réaction et la décélération.

Aussi on a : $\frac{d}{dt}$(d_f)= V_0 - a t

Après avoir parcouru la distance d_f, le véhicule s'arrête : $V = 0 \Leftrightarrow V_0 = at$

Les équations (1) et (2) deviennent alors :

$d_f = 1.2\,at + 0.26\,(at)^2$ (3)

$d_f = a\tau\, t + \frac{1}{2} a\, t^2$ (4)

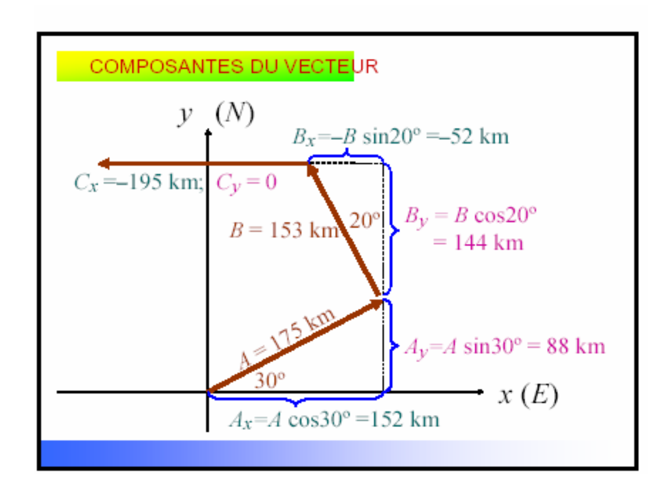
Par comparaison de (3) et (4), on obtient : $\tau = 1.2$ s et $a = 1.93$ m/s^2

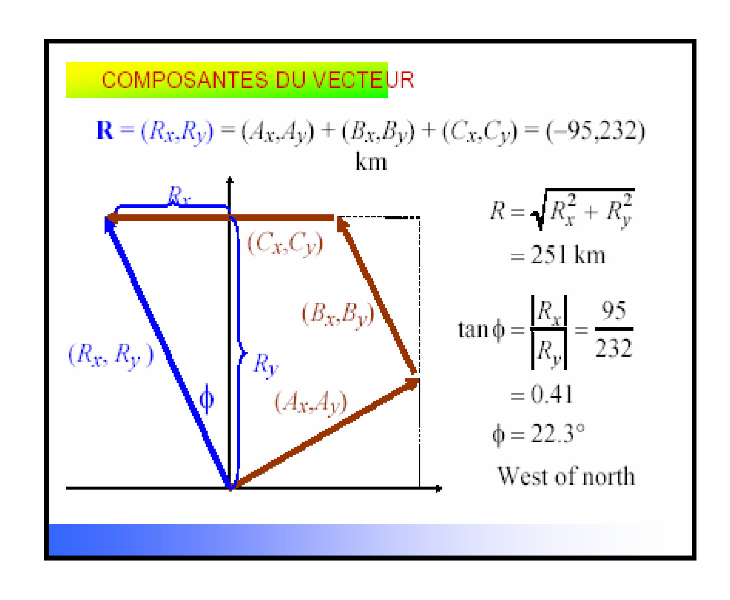
11/ $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c} \Leftrightarrow \vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$

Elevons au carré : $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta$ où β est l'angle entre les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

Si $\beta = \frac{\pi}{2}$: $c^2 = a^2 + b^2$: C'est le théorème de Pythagore.

12/





13/ $\vec{V} = \dot{x}\,\vec{i} + \dot{y}\,\vec{j} = a(1 - \cos t)\,\vec{i} + a\sin t\,\vec{j}$ et $\|\vec{V}\| = 2a\,\left|\sin\frac{t}{2}\right|$

$\vec{a} = \ddot{x}\,\vec{i} + \ddot{y}\,\vec{j} = b(\sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j})$ et $\|\vec{a}\| = b$

14/
Soit OXY un repère orthonormé avec OY un axe ascendant.
$\vec{a} = a\,\vec{j}$ et $\vec{V_0} = V_0\,\vec{i}$
Par intégration et en tenant compte de conditions initiales (à t=0 s : x_0=0 et y_0=0, $V_{0x} = V_0$ et V_{0y}=0) on obtient :

$$y = \frac{1}{2} a\,t^2 \text{ et } x = V_0\,t$$

a- les électrons restent entre les plaques jusqu'à x =0.2 m durant le temps $\frac{x}{V_0} = t$

A.N. : $t = 10$ ns

b- A cet instant, la composante V_y de la vitesse sera égale à $V_y = a\,t$
A.N. : V_y =10^6 m/s

A la sortie de la plaque, on aura un angle θ entre V et V_x , $tg\theta = \frac{V_y}{V_x}$

A.N. : θ = 2.86 °: C'est l'angle entre le vecteur vitesse e t l'axe des x.

c- La déviation verticale est donnée par l'ordonnée y à la sortie des plaques :
$y_D = \frac{1}{2} a\,t^2$ **A.N. :** $y_D = \frac{1}{2} 10^{14}\ (10^{-8})^2$= 5 mm.

15/ $\vec{V_1} = 2\,\vec{i}$ et $\vec{V_2} = 3\,\vec{j}$
a- On remarque que les deux vecteurs sont perpendiculaires. On a :
$\vec{V_1} = \frac{d}{dt}\vec{r}_1 = \frac{dx_1}{dt}\vec{i} = 2\,\vec{i}$ d'où : $\vec{r}_1(t) = (2t - 3)\,\vec{i}$

De même, on obtient : $\vec{r}_2(t) = (3t - 3)\,\vec{j}$

Par conséquent $\vec{r}_{12}(t) = \vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t) = -(2t - 3)\,\vec{i} + (3t - 3)\,\vec{j}$
b- La distance séparant les deux particules et donnée par :
$r_{12} = \sqrt{(-2t + 3)^2 + (3t - 3)^2} = \sqrt{13t^2 - 30t + 18}$

r_{12} est minimum quand $\frac{dr_{12}}{dt} = 0$: $26t - 30 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{15}{13}$ s

r_{12} —

Corrigé de la série n°2
Dynamique et Statique

1/ le volume de la sphère est $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ et $\rho = \frac{m}{V}$ **A.N** : ρ = 1,27 10^{17} Kg/m^3

La densité est $d = \frac{\rho_U}{\rho_{eau}}$ **A.N** : d = 1,27 10^{14}

2) Les forces qui s'exercent sur l'ascenseur sont : le Poids $\vec{P}$ et la Tension du câble $\vec{T}$.

a) En montée, l'accélération est ascendante (vers le haut). Par application de la 2ème loi de Newton (principe fondamental de la dynamique), on obtient :

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$$

La trajectoire est une droite verticale : c'est donc un mouvement rectiligne.
Projetons la relation vectorielle ci-dessus suivant un axe OX ascendant (dirigé vers le haut) :

$$-mg + T = ma \Leftrightarrow T = m(a + g)$$

A.N.: T = 1000 x (3+9.8) = 12800 N
On voit que T est bien supérieure au poids. Le câble doit supporter le poids de l'ascenseur, mais il doit aussi fournir une force supplémentaire nécessaire à l'accélération.

b) Dans ce cas (la descente) :

$$T - mg = -ma \Leftrightarrow T = m(-a + g)$$

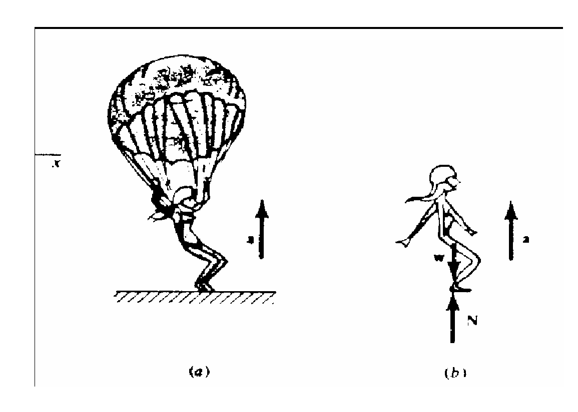
A.N.: T= 1000 x (9.8 - 3) = 6800 N < P.

3/ P_{eff} = ma –mg avec a = 3g d'où P_{eff} = 2 mg et $\vec{P}_{eff}$ est dirigé vers le haut.

4/ Le principe fondamental de la dynamique nous donne :

$$-P + N = ma = m\,3g \Leftrightarrow N = 4\,mg$$

La force exercée par le sol sur le parachutiste est 4 fois son poids. Par contre si la personne est simplement debout sur le sol, N est égale à P.
Si le parachutiste garde les jambes tendues au cours de l'atterrissage, il s'immobilisera avec une plus grande décélération sur une distance plus courte. La force qui s'exercera sur ses jambes sera donc plus importante (risque de fracture).



5/ i) Puisque le bloc reste fixe lorsque T est appliquée, la force de frottement f_S doit être égale et opposée à T : $f_S = T$ **A.N.** : $f_S = 20$ N

ii) Comme le bloc commence à glisser lorsque T = 40 N, la force de frottement maximale $f_{S,max}$ doit être égale 40 N.

La somme des forces verticales est nulle : n – mg = 0.

Or $f_{S,max} = \mu_S n = \mu_S mg$ **A.N.**: $\mu_S = 0,82$

iii) Puisque le bloc se déplace à vitesse constante sous T = 32 N, la force résultante est nulle :

$f_C = \mu_C n = \mu_C mg$ **A.N.**: $\mu_C = 0,65 < \mu_S$

6/ Soient O' le centre de la lune et o le centre d la terre : OO' = 3,9 10^5 Km.

La masse m est à r_L = O'm de la lune et à r_T = Om. On a $r_L + r_T$ = r = OO'

Par rapport à la terre, le poids de m est $P_T = \frac{GM_T m}{r_T^2}$

Par rapport à la lune, le poids de m est $P_L = \frac{GM_L m}{r_L^2}$

Pour $P_L = P_T \Leftrightarrow \frac{GM_T m}{r_T^2} = \frac{GM_L m}{r_L^2} \Leftrightarrow \frac{M_T}{r_T^2} = \frac{M_L}{r_L^2}$ d'où : $r_T = r\frac{\sqrt{M_T / M_L}}{1+\sqrt{M_T / M_L}}$

A.N. : r_T = 3,51 10^5 Km

7/ La tension $\vec{F}$ et le poids $\vec{P}$ n'ont pas de composantes horizontales. Comme on est devant un problème de statique, la somme de toutes les forces doit être nulle. Par conséquent la force $\vec{R}$ est elle aussi portée par la verticale.

Les conditions d'équilibre sont données par :

$$\vec{P} + \vec{F} + \vec{R} = \vec{0}$$

$$\vec{\mathrm{M}}_{/O}\vec{T} + \vec{\mathrm{M}}_{/O}\vec{P} + \vec{\mathrm{M}}_{/O}\vec{R} = \vec{0}$$

Le choix du point O est arbitraire. On peut le prendre confondu avec l'un des 3 points d'application des forces citées ci-dessus. Par exemple, choisissons le point confondu avec le pivot.

Soit r, f et p les points d'applications respectivement des forces $\vec{R}$, $\vec{F}$ et $\vec{P}$.

$\vec{\mathrm{M}}_{/O}\vec{F} = \vec{Of} \wedge \vec{F}$; $\vec{\mathrm{M}}_{/O}\vec{P} = \vec{Op} \wedge \vec{P}$ et $\vec{\mathrm{M}}_{/O}\vec{R} = \vec{or} \wedge \vec{R} = \vec{0}$ (o et r sont confondus)

$\left|\vec{Of}\right| = 0,03m$ et $\left|\vec{Op}\right| = 0,35m$

Soit un repère OXYZ tel que OZ soit perpendiculaire au plan OXY. OZ porte un vecteur unitaire $\vec{k}$ avec $\vec{k} = \vec{i} \wedge \vec{j}$

Projetons les relations vectorielles ci-dessus :

$$\text{(i)} \; -P\vec{j} - R\vec{j} + F\vec{j} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow -P - R + F = 0$$

$$\text{(ii)} \; -0,35P + 0,03F = 0 \quad \Leftrightarrow \; F = 11.67P$$

A.N. : F = 583 N et R = 533 N

8/ i) Appliquons la 2ème loi de Newton au feu rouge: $\vec{P}+\vec{T_3} = m\vec{a}$ .Or a = 0, d'où : $P = T_3$
A.N. T_3= 125 N.
ii) Appliquons la 2ème loi de Newton au nœud (point de rencontre des 3 tensions) : $\vec{T}_1+\vec{T}_2+\vec{T_3} = \vec{0}$

En projetant sur un système d'axes OXY orthonormés, on obtient :

$$T_1 \sin 37° + T_2 \sin 53° - T_3 = 0$$
$$-T_1 \cos 37° + T_2 \cos 53° = 0$$

A.N. : T_1 = 100 N et T_2 = 75 N

9/ Les équations d'équilibre pour un corps rigide sont : $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{P}+\vec{R}+\vec{N} = \vec{0}$ et $\sum \vec{M}_{/O} = \vec{0}$
Par projection sur un système d'axes OXY, on obtient :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Leftrightarrow F\sin\alpha - R\sin\beta = 0 \text{ et } F\cos\alpha - R\cos\beta + N = 0$$

$$\sum \vec{M}_{/O} = \vec{0} \Leftrightarrow d_2 F\cos\alpha - d_1 N = 0$$

10/ Le volume de la feuille d'or est V= 100 10^{-4} x 10 10^{-3}= 10^{-4} m^3.
La masse volumique de l'or est ρ=densité x 1000 Kg/m^3=19300 Kg/m^3
Par conséquent, la masse de la feuille d'or est m= ρ V
A.N. : m= 1.93 Kg

11/ m= ρ_{GR} V= $\rho_{GR}\ \frac{4}{3}\pi R^3$ **A.N. :** m= 1300 x $\frac{4}{3}\pi$ (2 10^{-6}) ^{3}= 4.36 10^{-14} Kg

12/ $\frac{F}{m} = a$ A.N. : $a = \frac{210^5}{60} = 3333$m/$s^2$
Et $a = 340\,g$ avec $g = 9.8$ m/s^2

13/ a- Appliquons la 2ème loi de Newton à m_1. Comme le bloc se déplace sur la surface horizontale, il ne possède pas alors d'accélération verticale a_y=0

Par projection sur un système d'axes OXY, on obtient :

$$N_1 - W_1 = 0 \quad (1) \text{ et } \quad T = m_1\, a_x = m_1\, a \quad (2)$$

T et a sont des inconnues

$N_1 = W_1 = m_1\, g$ **A.N. :** $N_1 = W_1 = 19.8$ N

Appliquons la 2[ème] loi de Newton à m_2. Comme le bloc se déplace suivant la verticale, il ne possède pas alors d'accélération horizontale a_x=0. De la même façon, on obtient :

$$-T + m_2\, g = m_2\, a_y = m_2\, a \qquad (3)$$

L'absence de frottement conduit à prendre la même tension T des 2 cotés de la poulie et par conséquent la même accélération a.

Comme $a = T/ m_1$, (3) devient : $-T + m_2\, g = m_2\, (T/ m_1)$

D'où : $T = m_2 m_1 g/ (m_2+m_1)$

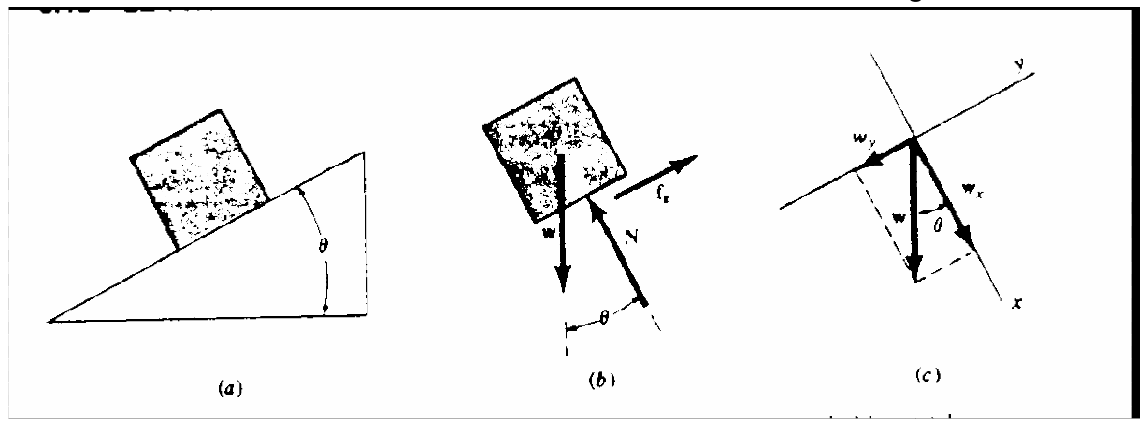
A.N. : T= 65.33 N

b- $a = T/ m_1$ **A.N. :** $a = 3.27\ m/s^2$

c- Comme le mouvement est uniformément accéléré (a est une constante positive) et que le système st initialement au repos, alors :

$$\Delta x = \frac{1}{2}\, a\, t^2 \qquad \textbf{A.N. : } \Delta x = 6.54 \text{ m}$$

14/ Dans cet exercice, on choisira les axes comme le montre la figure ci-dessous.



Le poids W (ou P) a pour composantes :
$W_x=P_x=W\cos\theta=P\cos\theta$ **et** $W_y=P_y=-W\sin\theta=-P\sin\theta$

Si le bloc reste fixe la force de frottement statique $f_s = P\sin\theta$
La réaction du support N est égale $P\cos\theta$, d'où $tg\theta = f_s/N$
Quand le bloc commence à glisser, on a : $f_s = f_{s,max} = \mu_s N$, par conséquent :

$$\mu_s = tg\theta_{max}$$

Le dispositif présenté dans cet exercice permet de mesurer de façon simple le coefficient de frottement statique. En effet, il suffit de faire varier progressivement θ jusqu'à ce que le bloc commence à bouger.

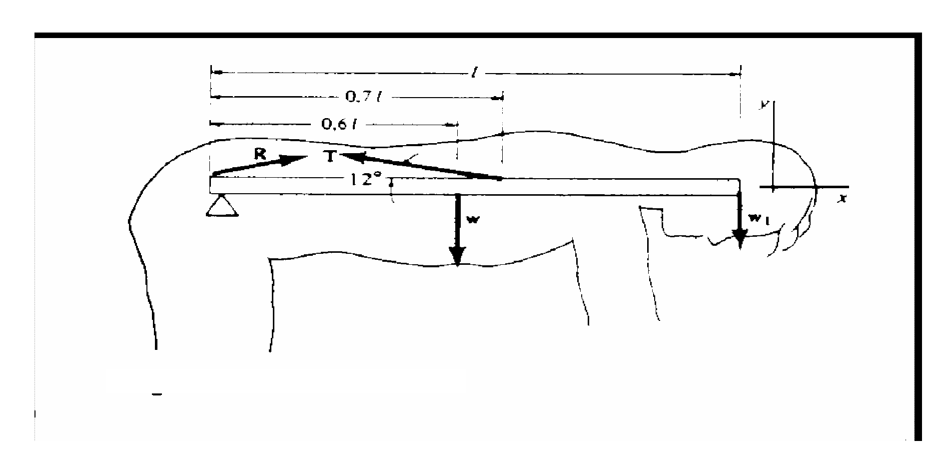
15/ On a : $f_s = \mu_s N = \mu_s mg$ **A.N.:** $f_s = 30$ N

16/ On applique les 2 relations de la statique: $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$ et $\sum \vec{M}_{/O} = \vec{0}$
On obtient dans ce cas: $F_1 - F_2 - F = 0$
Si on choisit de déterminer les moments par rapport au point d'application de la force F, alors :

$$0.01\,F_1 - 0.03\,F_2 = 0 \Leftrightarrow F_1 = 3\,F_2$$

A.N. : $F_1 = 0.75$ N et $F_2 = 0.25$ N

17/ C'est un problème de statique : $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$ et $\sum \vec{M}_{/O} = \vec{0}$



Projetons les forces sur le système d'axes OXY.

$$R_x - T\cos 12° = 0 \quad \textbf{(1)}$$

$$-W_1 + R_y + T\sin 12° - W = 0 \quad \textbf{(2)}$$

Déterminons les moments par rapport au point d'application r de la force R :

$\vec{M}_{/r}\,\vec{R} = \vec{rr}\wedge\vec{R} = \vec{0}$, $\vec{M}_{/r}\,\vec{W} = \vec{rw}\wedge\vec{W}$

$\vec{M}_{/r}\,\vec{W}_1 = \vec{rw_1}\wedge\vec{W}_1$ et $\vec{M}_{/r}\,\vec{T} = \vec{rt}\wedge\vec{T} = \vec{rt}\wedge\vec{T}_y$

On obtient alors : 0.6 W – 0.7 T sin12° + W_1 = 0 **(3)**

a- A.N. : Cas où W_1 = 0 : R_y =70 N, R_x = 1976 N et T = 2020 N

b- A.N. : Cas où W_1 = 175 N : R_y = -5 N, R_x = 3153 N et T = 3223 N Comme R_y est négative, la force R est dirigée vers l'extérieur du dos.

Corrigé de la série n°3
Mouvements circulaire et oscillatoire

1/ ω_0 = 3700 tours/min = (3700 x 2π)/60 rad/s = 387 rad/s

a- V = rω **A.N.:** V = 97 m/s

b- On a: $\omega^2 - \omega^2_0 = 2\,\alpha\,\Delta\theta$ et $\alpha\,t = \omega - \omega_0$ d'où: $\Delta\theta = \frac{1}{2}(\omega+\omega_0)\,t$

AN: ω = 0 rad/s et t = 3 s d'où: $\Delta\theta$ = 581 rad

Le nombre de tours est N = $\Delta\theta/2\pi$ **AN :** N = 581/2π = 92,47

2/ Le volume d'une sphère est $\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Le poids P est donné par P = m g = $\rho\,\mathcal{V}\,g = \rho\,\frac{4}{3}\pi R^3 g$

A.N. : P = 4,4 10^{-13} N

Quant à la force centrifuge F_C, elle est donnée par : $F_C = m\,\omega^2 r = \rho\,\frac{4}{3}\pi R^3\,\omega^2 r$

AN : F_C = 4,8 10^{-9} N

On voit que F_C est très grande devant P : $F_C = 10^4$ P.

Sous l'effet de F_C, la sédimentation sera rapide: C'est l'intérêt des centrifugeuses.

3/ a- La force électrostatique (force exercée par le proton sur l'électron) vaut :

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-e^2}{r^2}\frac{\overrightarrow{OM}}{\left|\overrightarrow{OM}\right|}$$

Où O est le centre du repère confondu avec le proton et r est la distance qui sépare l'électron du proton.

La même force est exercée par l'électron sur le proton (3 ème loi de Newton).

AN : $\left|\vec{F}\right|$ = 8,2 10^{-8} N

Quant à la force gravitationnelle exercée par le proton sur l'électron, elle vaut :

$$\vec{F}_G = \frac{-GMm}{r^2}\frac{\overrightarrow{OM}}{\left|\overrightarrow{OM}\right|}$$

AN : $\left|\vec{F}_G\right|$ =3,6 10^{-47} N

$\left|\vec{F}_G\right| << \left|\vec{F}\right|$: En physique de l'atome, on négligera toujours la force gravitationnelle devant la force électrostatique.

b- L'application de la 2 ème loi de Newton nous donne :

$$F = ma \Rightarrow a = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{-e^2}{r^2} \frac{1}{m} \frac{\vec{OM}}{\left|\vec{OM}\right|}$$

L’accélération est dirigée vers O : elle est donc centripète (ou radiale) $\vec{a} // \vec{OM}$.
AN : a = 9 10^{22} m/s^2.

Le mouvement est circulaire uniforme : a = $\frac{V^2}{r}$ où V est la vitesse de l’électron.

AN : V = 2,2 10^6 m/s.

Quant à la fréquence f, elle est donnée par : $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{V}{2\pi r}$

AN : f = 6,6 10^{15} Hz.

4/ Une charge q de vitesse $\vec{V}$ placée dans un champ magnétique $\vec{B}$ sera soumise à la force de Laplace: $\vec{F} = q\vec{V} \wedge \vec{B}$

Dans cet exercice $\vec{V} \perp \vec{B}$: $\left|\vec{V} \wedge \vec{B}\right| = VB$

L’ion décrit un arc de cercle à vitesse constante : l’accélération est centripète et vaut $\frac{V^2}{r}$ avec $r = \frac{d}{2}$

Par application de la 2 ^{ème} loi de Newton, on obtient :

$$qVB = M\frac{V^2}{r} = 2M\frac{V^2}{d} \Rightarrow M = \frac{qBr}{V}$$

AN. : M = 6,7 10^{-27} Kg = 4 M_P (M_P masse du proton)
La masse de l’ion (de charge ++) M est égale à 4 fois la masse du proton. L’ion est l’Hélium doublement ionisé H_e^{++} : C’est la particule α.

5/ Soit O le centre de la terre, m la masse du satellite et r=OM : distance entre le satellite et le centre de la terre.
r= h+R_T où R_T est le rayon de la terre et h l’altitude
a- Par application de la deuxième loi de Newton : ma= G M_T/r^2

b- à r=cte, l’accélération est constante
On a V2/r = G M_T/r^2 d’où V(r) = G M_T/r

c- V=r ω et T=2π/ω d'où T^2=C r^3 avec C= 4π^2/GM_T
C’est la troisième loi de Kepler.

d- r = h+R_T $\Rightarrow$ h= - R_T+ (GM_T $T^2/4\pi^2)^{1/3}$
A.N.: h= 35775 Km

6/ Pour voir le soleil fixe à l'horizon, il faut que l'avion ait une vitesse angulaire égale à celle de la terre mais de sens opposé.

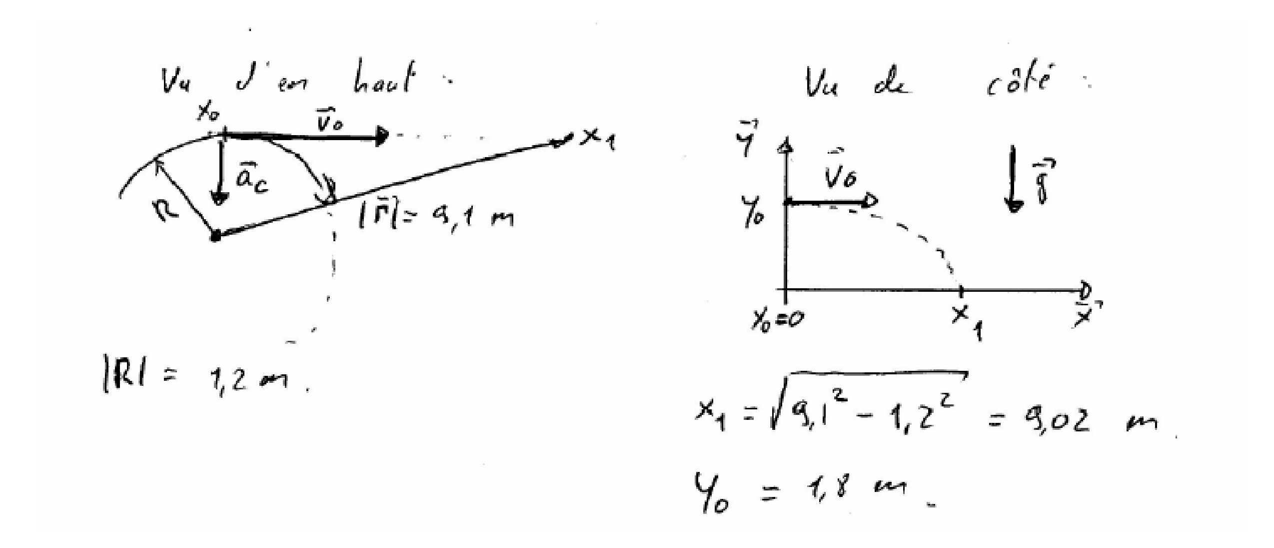
$\omega_{Terre} = \frac{2\pi}{T}$ où $T = 24\,h$

Quant à la vitesse linéaire, elle est donnée par : $V = r\,\omega_{Terre} = r\,\frac{2\pi}{T} = (R_T + h)\frac{2\pi}{T}$

R_T est le rayon de la terre et h est l'altitude

A.N. : $V = 465.8\,m/s = 1677\,km/h$

7/



Suivant OY : $y(t) = y_0 - \frac{1}{2}gt^2$

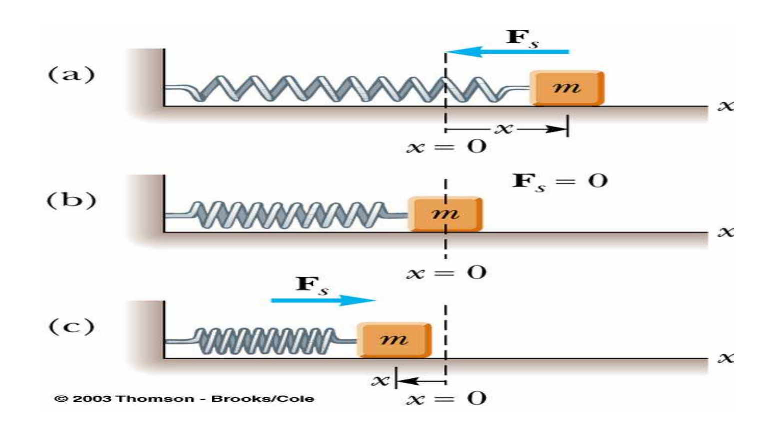
Lorsque la pierre touche le sol, $y(t) = 0 \Rightarrow y_0 = \frac{1}{2}gt^2$ **A.N. :** t = 0.61s

Suivant OX : $x(t) = V_x t$

A t = 0.61 s : $V_x = \frac{9.1}{0.61} = 14.92\,m/s$

L'accélération centripète vaut : $a_c = \frac{V^2}{R}$ **A.N. :** $a_c = 185.5\,m/s^2$

8/ Equation d'une masse m accrochée à un ressort horizontal



En l'absence de frottement, le poids de m est compensé par la réaction du support. Il reste la force de rappel du ressort.

Comme en cours : $-k\,x + m\dfrac{d^2x}{dt^2} = 0$

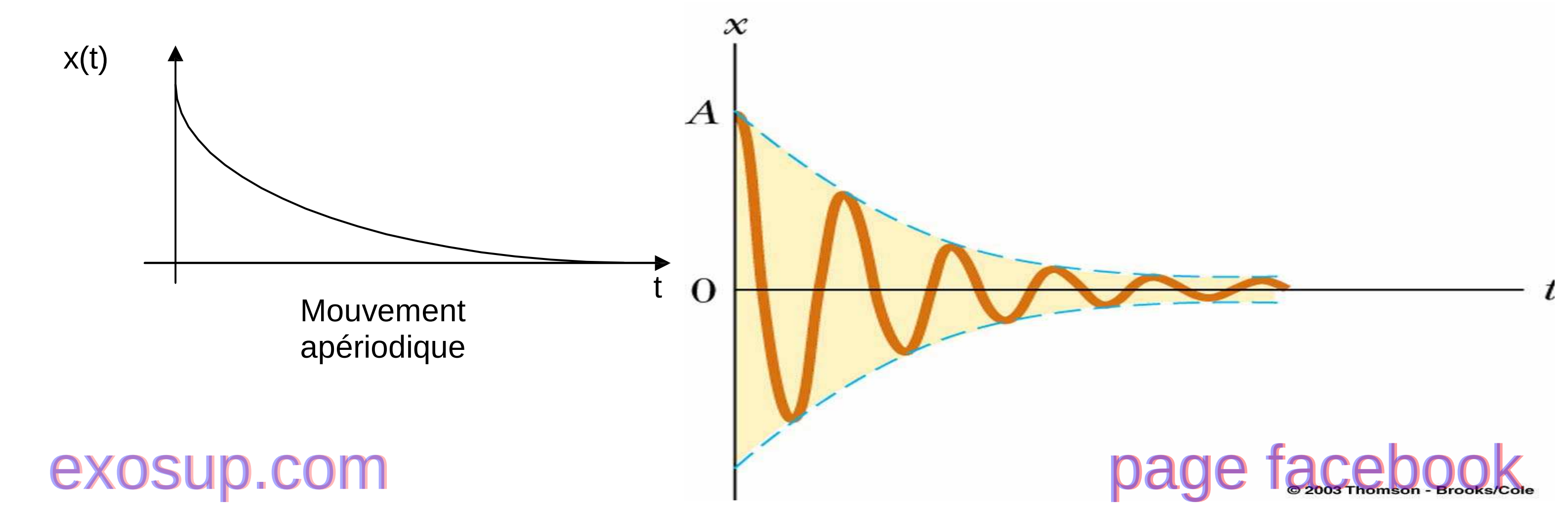
C'est l'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

9/ Mouvement oscillatoire amorti

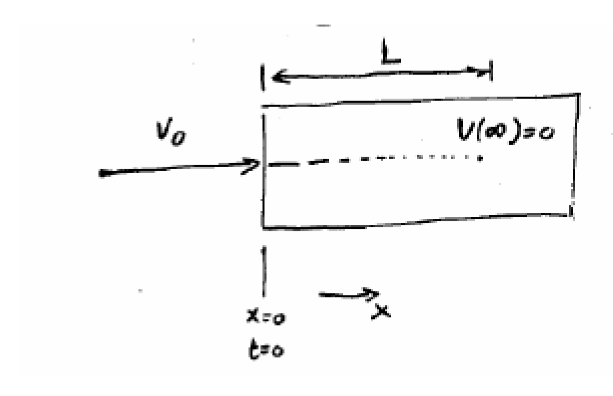
Le mouvement harmonique simple est un cas idéal. En effet, les forces de frottement interviennent pour amortir les oscillations.
L'amplitude de l'oscillation baisse plus ou moins rapidement jusqu'à s'annuler, sauf si on applique une force pour compenser les pertes causées par les frottements qui sont des forces dissipatives. Ces dernières notées F_d sont généralement proportionnelles à la vitesse $\vec{V}$: $\vec{F}_d = -\lambda \vec{V}$
Où λ est une constante positive appelée coefficient d'amortissement.

A une dimension : $F = -\lambda \dot{x}$

La 2ème loi de Newton devient : $-k\,x - \lambda \dot{x} = m \ddot{x}$
C'est une équation différentielle du 2ème ordre linéaire, à coefficient constants et sans second membre.
Si le frottement est très important, l'amplitude s'annule très vite : c'est le mouvement apériodique. Dans le cas contraire, on obtient un mouvement pseudo-périodique ayant une pseudo-période T = T0/ ?.



10/



On a : $\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow -\lambda v = m\dfrac{dv}{dt}$

A une dimension : $\dfrac{dv}{v} = -\dfrac{\lambda}{m}dt$

Par intégration et en tenant compte du fait que $v=v_0$ à t=0 : La vitesse dans un milieu visqueux est donnée par : $V(t) = V_0 \exp(-t/\tau)$ avec $\tau = \dfrac{m}{\lambda}$

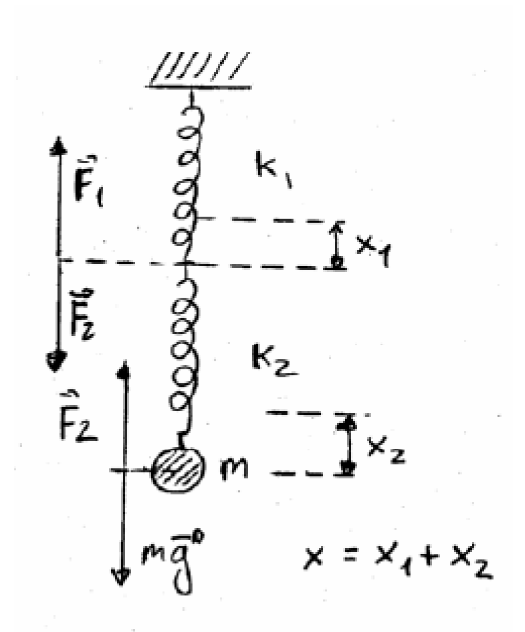
Déterminons la distance parcourue après un temps infini :

$L = \int_0^{\infty} V(t)dt = V_0 \int_0^{\infty} \exp(-t/\tau) = V_0 \tau$

Or $L = V_0 \tau = V_0 \dfrac{m}{\lambda}$ **A.N. :** L = 5 cm

11/

<u>Cas n°1</u> :



A l'équillibre: $\|\vec{F}_1\| = \|\vec{F}_2\|$

$K_1x_1 = F_1$ et $K_2x_2 = F_2 = mg$ D'où : $F_1 = mg$

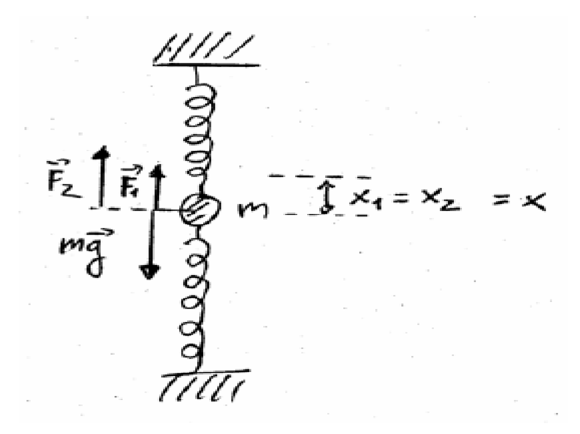
En combinant les équations, on obtient : $x_1 + x_2 = mg\frac{k_1 + k_2}{k_1k_2}$

Si on remplace $x_1 + x_2 = x$ et $k = \frac{k_1k_2}{k_1 + k_2}$, on peut écrire : $kx + mg = 0$

Hors équilibre, on a : $\frac{k}{m}x + x = 0$: c'est l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1}{m}}\sqrt{\frac{k_1k_2}{k_1 + k_2}}$ et de fréquence $\nu_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{m}}\sqrt{\frac{k_1k_2}{k_1 + k_2}}$

Cas n°2 :



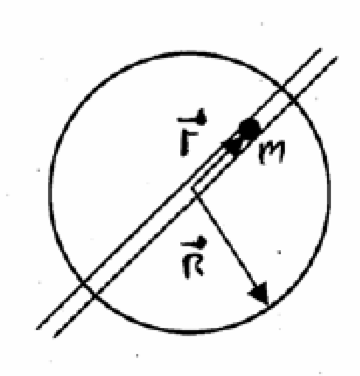
A l'équillibre: $F_1 + F_2 = \updownarrow m\,g$ ou $F_1 + F_2 = mg$

Or $x_1 = x_2 = x$, d'où : $x_1 = \frac{mg}{k_1 + k_2}$ d'où : $(k_1 + k_2)x + mg = 0$

Hors équilibre, on a : $\frac{k_1 + k_2}{m}x + x = 0$: C'est l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$ et de fréquence $\nu_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$

12/



On $F = ma$ où $a = \frac{GM_T(r)}{r^2}$

$M_T(r)$ étant la masse de la terre quand l'objet est à une distance r inférieure à R_T rayon de la terre.

Or $M_T(r) = \frac{M_T r^3}{R^3}$ d'où : $a = \frac{GM_T r}{R^3}$

L'équation du mouvement est alors donnée par : $m\frac{d^2r}{dt^2} = m\frac{GM_T r}{R^3}$

$\Rightarrow \frac{d^2r}{dt^2} = kr$ où $k = \frac{GM_T}{R^3}$

C'est l'équation d'un oscillateur harmonique de période $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM_T}}$

Comme $g_0 = \frac{GM_T}{R^2}$ est l'accélération de la pesanteur à la surface terrestre, on peut écrire : $T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g_0}}$ **A.N. :** T= 5075 s = 1 h 24 min 35 s

13/ Pour chaque masse, on a : $ma = F$ avec $F = -kd$



Posons : $x_2 - x_1 = d$

$$m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} = +kd \qquad (1)$$

$$m_2\frac{d^2x_2}{dt^2} = -kd \qquad (2)$$

(2) x m_1 - (1) x m_2

$$m_1m_2\left[\frac{d^2x_2}{dt^2} - \frac{d^2x_1}{dt^2}\right] = -kd(m_1 + m_2)$$

™

$$\frac{d^2 d}{} \quad m + m$$

dt^2

$= \updownarrow k\, d \frac{1 \qquad 2}{}$

C'est l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation ⌉ =

∝ est appelée masse réduite

Corrigé de la série n°4
Travail et énergie

1/ Fait en cours et disponible sur internet (chap.4)

2/
W = N m g h : Ce travail va servir à brûler une masse M de graisse.
Or $E_{méc}$ = 0.2 E où E = 3.8 10^6 J par kg
M = W/ $E_{méc}$ **A.N. :** M = 6.3 g

3/ E_P= - $\int F(x)dx = \int Kx\,dx = \frac{1}{2}Kx^2 + Cte$

L'énergie potentielle étant nulle pour x = 0 (la position d'équilibre): la constante est alors nulle. Il reste : $E_P = \frac{1}{2}K A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$

L'énergie cinétique est $E_C = \frac{1}{2}m\ddot{x}^2 = \frac{1}{2}m\,\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$, Or $\omega^2 = \frac{K}{m}$ d'où :

$$E_C = \frac{1}{2}K A^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

L'énergie mécanique **-** $E_m = E_c + E_P = \frac{1}{2}KA^2 > 0$

L'énergie mécanique est bien conservative.

Application: $E_P = \frac{1}{2}K x^2$ **AN :** $E_P = \frac{1}{2}$ (800 x $0,5^2$) = 100 J

4/ La force électrostatique est donnée par :

$$\vec{F} = m\vec{a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{-e^2}{r^2}\frac{\vec{OM}}{|\vec{OM}|}$$

Comme le mouvement est circulaire uniforme, alors $\vec{a} = \frac{-V^2}{r}\frac{\vec{OM}}{|\vec{OM}|}$

a- L'énergie cinétique E_c est donnée par $E_c = \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r}$

b- L'énergie potentielle est donnée par E_P = - $\int F(r)dr = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r^2}dr = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r}$ + Cte

L'énergie potentielle étant nulle à l'infini: $E_P = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r}$

c- $E_m = E_c + E_P = -\frac{1}{8\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r}$: L'énergie mécanique est négative. Elle est bien conservative sur cette orbite circulaire de rayon r.

5/

a- La masse de l'air est donnée par : $m = \rho V = \rho S x = \rho \pi r^2 V t$

S est la section d'une pale. t est le temps durant lequel le vent traverse la pale à la vitesse V.

b- $E_C = \frac{1}{2} m V^2 = \frac{1}{2} \rho S^2 V^3 t$

c- L'énergie électrique obtenue est $E = 0{,}3\ E_C$ et la puissance électrique produite vaut :

$$\mathcal{P} = \frac{E}{t} = 0{,}3\ \frac{1}{2}\ \rho\ \pi S^2\ V^3$$

On remarque que $\mathcal{P}$ dépend fortement de la vitesse du vent.

AN : $\mathcal{P}$ = 5400 W C'est une puissance suffisante pour 3 à 4 habitations moyennes.

6/ On choisira le bas de la colline comme référence.

a- $mg\,H = \frac{1}{2} mV^2 \Leftrightarrow V = \sqrt{2gH}$ **AN:** V = 19,8 m/s

b- $\frac{1}{2} mV^2 = mg\,H + W_d \Leftrightarrow W_d = \frac{1}{2} mV^2 - mg\,H$ **AN:** W_d = - 7300 J

c- Puisque le terrain est plat, il n'y a pas de variation d'énergie potentielle. Toute l'énergie cinétique de la skieuse doit être dissipée.
La réaction normale n est égale et opposée au poids. En conséquence le travail total se réduit à celui de la force de frottement cinétique f_c :

$$W_{f\,c} = -\ \mu_C\ mg\ d$$

Comme la vitesse finale est nulle, on a : $0 - \frac{1}{2} mV^2 = -\ \mu_C\ mg\ d$

A.N.: Si V = 19,8 m/s, d = 8 m
Si V = 10,0 m/s, d = 2 m

7/ Le travail total pour vaincre la force de pesanteur est W = N Mg h
N est le nombre de fois qu'il faut soulever le poids de masse M d'une hauteur h.
Comme un kg de graisse fournit une énergie de $3{,}8\ 10^7$ J et que cette dernière est convertie en énergie mécanique avec un rendement de 20 %, alors :
Pour une masse m de graisse : $E = 0{,}2\ m\ 3{,}8\ 10^7$ J.

Or $E = W \Leftrightarrow N = 0{,}2\ m\ 3{,}8\ 10^7 / Mg\,h$ **AN :** N = 5428

8/

Compléments du cours :
Considérons une roue de rayon r tournant autour d'un axe Δ fixe.
Quand la roue tourne d'un angle θ, un point de la jante effectue un déplacement valant r dθ.
Une force F agissant tangentiellement à la roue au cours de déplacement effectuera un travail $dW = F\ r\ d\theta$ et la puissance est donnée par $\mathcal{P} = \frac{dW}{dt} = F\,r\,\omega$

Quant à l'énergie cinétique d'un objet de masse m en mouvement de rotation, elle est donnée par: $E_C = \frac{1}{2} m\ V^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$

Résolution de l'exercice 8 : Prenons comme hauteur de référence pour E_P la surface de l'eau.
Au sommet E_C est nulle.

E_C totale $= \frac{1}{2} m\ V^2 + \frac{1}{2} I \frac{V^2}{r^2}$

Comme l'énergie mécanique est conservée : $\frac{1}{2}m V^2 + \frac{1}{2}I\frac{V^2}{r^2}$ = mg h ou encore :

$$V = \sqrt{\frac{2gh}{1+\frac{I}{mr^2}}}$$

AN : $V = 12{,}5$ m/s

Remarque : Si le sceau n'était pas relié au treuil, il aurait acquis une vitesse plus grande.

9/ Par analogie avec l'ex. 13 de la série n°2, on a :

$$a = 2\Delta x \frac{g(-m_1 \sin 37 + m_2}{m_1 + m_2} = cte$$

On utilisera aussi $V_f^2 - V_i^2 = 2a\,\Delta x$

$V_f = V_A = V_B = 1.51\,m/s$

10/ Donnée manquante : k = 800 N/m

a) On a $\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mV^2$

$V = 0.8$ m/s

b) $\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mV^2 = mg\,h = mg\,d\ \sin 25$

$d = 7.7$ cm

11/

a) On a : $\frac{1}{2}k\,x^2 = mg\,h$ **A.N.:** $k = 69688$ N/m

b) $a_{max} = x_{max}\,\omega^2$ (vue en cours) **A.N.:** $a_{max} = 52266$ m/s^2

12/ $P = M_{tot}\, g\, h / t$ **A.N. :** P = 41 kW =55.6 hp

13/ On a la puissance = W/ t = m g h /t

D'où m/t = puissance / g h= 50 000000/ 9,8 x 75 = 68027 Kg/s

Or 1 000 Kg d'eau est équivalente à 1 000 l= 1 m^3. D'où le débit Q = 68 m^3/s

Corrigé de la série n°5
Mécanique des fluides non visqueux

1/ Soient V_S le volume de l'iceberg immergé dans l'eau et V le volume total de l'iceberg.
La poussé d'Archimède P_A sera donnée par:

$$P_A = \rho_{eau\ de\ mer}\, V_S\, g$$

L'iceberg est en équilibre $\Rightarrow P_A = P \Rightarrow \rho_{eau\ de\ mer}\, V_S\, g = mg = \rho_{glace}\, V g \Rightarrow \frac{V_S}{V} = \frac{\rho_{glace}}{\rho_{eau\ de\ mer}}$

A.N.: $\frac{V_S}{V} = \frac{920}{1025} = 0.90$: L'iceberg est immergé dans l'eau de mer à 90 %.

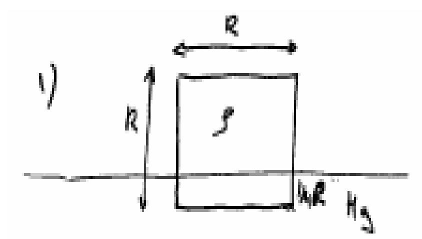
2/ Soient V_S le volume de la bûche immergé dans l'eau et V le volume total de la bûche
La poussé d'Archimède P_A sera donnée par:

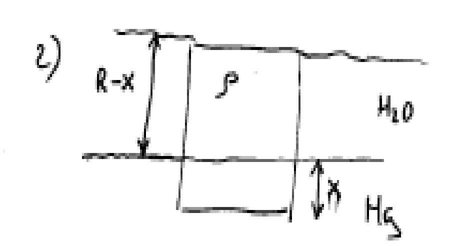
$$P_A = \rho_{eau\ de\ mer}\, V_S\, g$$

La bûche est en équilibre $\Rightarrow P_A = P \Rightarrow \rho_{eau\ de\ mer}\, V_S\, g = mg = \rho_{bûche}\, V\, g \Rightarrow \frac{V_S}{V} = \frac{\rho_{buche}}{\rho_{eau\ de\ mer}}$

A.N.: $\frac{V_S}{V} = \frac{800}{1000} = 0.8$: La bûche est immergée dans l'eau de la rivière à 80 %.

3/ le volume du cube est $V = R^3$.
On a : $R^3 \rho\, g = \frac{1}{4} R^3 \rho_{Hg}\, g$ (1) et $R^3 \rho\, g = R^2 .x .\rho_{Hg}\, g + (R-x) R^2 \rho_{eau}\, g$ (2)





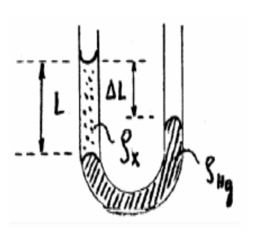
En combinant (1) et (2), on obtient :

$$\frac{x}{R} = \left[\frac{1}{4}\frac{\rho_{Hg}}{\rho_{eau}} - 1\right] \frac{1}{\left[\frac{\rho_{Hg}}{\rho_{eau}} - 1\right]}$$

A.N. : $\frac{x}{R} = 19\%$

4/ On a : $P = P_0 + \rangle\ g\ d$ où P_0 est la pression atmosphérique **A.N. :** P= 1.06 atm

5/ La pression est identique à la même profondeur.



$P_{atm} + \rho_{Hg}\, g\,(L - \Delta L) = P_{atm} + \rho_x\, g\, L \Rightarrow \rho_{Hg}\,(1 - \frac{\Delta L}{L}) = \rho_x$ **A.N. :** $\rho_x = 952\ kg/m^3$

6/ A 40 m de profondeur, la pression sur le corps du sub est donné par: $P = P_{atm} + \rho_{eau} h g \approx 5\ atm$.
Pour respirer l'air de la bouteille par exemple, il a besoin de compenser la pression externe, et il aura de l'air dans les poumons à une pression de $5\ atm$.
S'il remonte avec cet air dans les poumons, il se retrouvera en surface avec une pression externe de $1\ atm$. Ainsi, l'air dans les poumons à $5\ atm$ cherchera à s'évacuer. Ceci est très dangereux car il peut causer un pneumothorax ou encore une embolie gazeuse.
Pneumothorax : épanchement de gaz dans la cavité pleurale
Embolie gazeuse : obstruction des vaisseaux par des bulles de gaz 'surtout l'azote) accompagnant une brusque décompression de l'air respiré ou pénétrant par une plaie d'un vaisseau.

7/ La variation de pression due à la profondeur h s'exprime par $\Delta P = \rho_{eau}(h + 0.3)g$.
Avec une détente maximale, les poumons sont capables de générer une différence de pression égale à 86 mm Hg.
D'où la profondeur maximale h_{max} est donnée par : $h_{max} + 0.3 = \frac{\Delta P}{\rho g}$ **A.N. :** $h_{max} = 0.87 m$
En fait h représente la limite supérieure de profondeur. Pour être sûr de respirer, il faut prendre la moitié de cette profondeur : $h_{max} = 0.44 m$

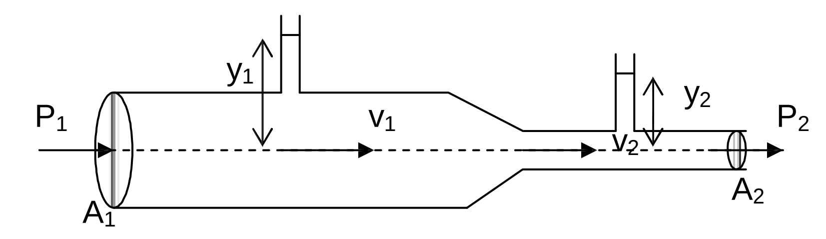
8/ - Le débit $= Q = \frac{volume}{temps} = \frac{masse}{\rho_{pétrole}\, temps}$ **A.N. :** $Q = \frac{125\ 10^3}{24 \times 800 \times 3600} = 0.0018\ m^3/s$

$Q = A\, v$ avec $A = \pi r^2$, d'où $v = \frac{Q}{\pi r^2}$ **A.N. :** $v = 1{,}43\ 10^{-4} m/s$

$P = P_{atm} + \rho_{eau\ de\ mer}\, g\, h$ **A.N. :** $P = 1.013\ 10^5 + (10^3\ 9.81\ 3000) = 295.3\ 10^5\ Pa$

9/ La pression de jauge est donnée par $P - P_{atm}$ où P est la pression du fluide au rez-de-chaussée et
$P - P_{atm} = \rho g h$ **A.N. :** $h = 30.6\ m$

10/
On a montré dans le cours (tube de Venturi) que :



$$v_1 = \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1)}}$$

A.N.: $v_1 = 0.125\ m/s$

11/ On a:

$Q = \frac{V}{t}$ **A.N.:** $Q = \frac{65\,10^{-3}}{0.13} = 0.5\,m^3/s$

$Q = Av \Rightarrow v = \frac{Q}{A}$ **A.N.:** $v = 1\,m/s$

12/ Fait en cours

13/ Pour calculer le débit Q, on calculera d'abord la vitesse de l'eau en bas du barrage.

$v = \sqrt{2g(h - h_1)}$ **A.N. :** $v = 43.7\,m/s$

Et $Q = Av = \pi r^2 v$ **A.N. :** $Q = 858.8\,m^3/s$

La puissance est donnée par : $P = \frac{E_{cin}}{t} = \frac{1}{2}\frac{\rho V v^2}{t} = \frac{1}{2}\rho v^2 . Q$ **A.N. :** $P = 819\,MW$

Corrigé de la série n°6
Mécanique des fluides visqueux

I/

a- $Q = Av_{moy} \Leftrightarrow v_{moy} = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi r^2}$ **A.N. :** $v_{moy} = \frac{0.01}{\pi\, 4 10^{-4}} = 7.96\, m/s$

b- Le nombre de Reynolds est donné par : $N_R = \frac{2R\,\rho\, v_{moy}}{\eta}$

A.N. : N_R= 316815 > 3000 : l'écoulement est turbulent.

II/ L'écoulement est laminaire si $N_R \le 2000 \Leftrightarrow \frac{2R\,\rho\, v_{moy}}{\eta} \le 2000 \Leftrightarrow v_{moy} \le 2000 \frac{\eta}{2R\,\rho}$

A.N. : $v_{moy} \le 098\, m/s$

Le débit est $Q = Av_{moy} = \pi r^2 v_{moy}$ **A.N. :** $Q = 123 10^{-5}\, m^3/s$

III/

a- $Q = Av_{moy} \Leftrightarrow v_{moy} = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi r^2}$ **A.N. :** $v_{moy} = \frac{0.001}{\pi\, 16\, 10^{-6}} = 1.99\, 10^{-2}\, m/s$

b- $\Delta P = \frac{8 v_{moy}\, \eta\, l}{R^2}$ (loi de Poiseuille) **A.N. :** $\Delta P = 2.1\, Pa$

c- la puissance st donnée par $\mathcal{P} = \Delta P\, v_{moy}\, \pi R^2$ **A.N. :** $\mathcal{P} = 2.1\, \mu W$

La puissance nécessaire pour pomper le sang à travers cette artère est très faible devant le métabolisme (qui est de $10\, W$)

IV- On a 3 forces :
Le poids, la poussée d'Archimède et la force de frottement visqueux.
Pour avoir une vitesse limite, il faut que la somme vectorielle des 3 forces soit nulle.
D'où après projection sur un axe descendant:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{acier}\, g = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{air}\, g + 6\pi R \eta_{air} v_{lim}$$

A.N. : $v_{lim} \approx 10^6\, m/s$. Ce résultat n'a aucune signification physique car la vitesse de la boule est une vitesse relativiste $(\approx \frac{1}{100} c)$.

On travaillera alors en régime turbulent où la force de frottement visqueux est donnée par :

$$F = \frac{1}{2} A \pi R^2 \rho_{air} v^2$$

Dans ce cas, on obtient : $v_{lim} = \sqrt{\frac{8Rg}{3A\rho_{air}}}$

A.N. : $v_{lim} \approx 267\, m/s$.

VI/ Loi de Poiseuille $\Delta P = \dfrac{8 v_{moy} \eta \mathbf{l}}{R^2} \Leftrightarrow v_{moy} = \dfrac{\Delta P R^2}{8 \eta \mathbf{l}}$ **A.N. :** $v_{moy} = 1.83\, m/s$

VII/ Pour un écoulement laminaire, la résistance à l'écoulement est donnée par : $R_f = \dfrac{8 \eta \mathbf{l}}{\pi R^4}$

A.N. : $R_f = 37162\ Pa.s/m^3$

On a $R_f = \dfrac{\Delta P}{Q} \Leftrightarrow \Delta P = R_f\, Q$ **A.N.:** $\Delta P = 3.72\, Pa$

Cette valeur est très faible par comparaison à la perte de charge totale du système cardiovasculaire qui est de l'ordre de 13.3 kPa. La majeur partie des résistances vasculaires et des pertes de charge se produit dans les artères de petit calibre (artères terminales, capillaires ...)

VII/

1- $Q = A v_{moy} = \pi r^2 v_{moy}$ **A.N. :** $Q = 2.53\, 10^{-5}\ m^3/s$

2- $N_R = \dfrac{2R \rho v_{moy}}{\eta}$ **A.N. :** $N_R = 3418$

N_R f 3000 : l'écoulement est turbulent

3- $\Delta P = \dfrac{8 v_{moy} \eta \mathbf{l}}{R^2}$ **A.N. :** $\Delta P = 344\, Pa$

ديكور :

Just-listen et Just-work

أخي الكريـــــــم قدمنــــا لك هذا الكتاب لا من أجل ربح
المــــال و لا من أجل السمعة و لا من أجل غــــــاية دنيوية
أخرى و لكن في سبيل الله فلا تنسانا من دعـــــــــائك الصالح لنا
و لعائلاتنا و لإخواننا في فلسطيـــــن و العراق و لكافة المسلمين
في كل مكــــــان و السلام عليكم و رحمة الله .

http://e-cole.co.cc